Btn 2004

Exercice 1 (7 points)

Dans tout l'exercice, on arrondira les prix au centime d'euro.

A compter du 1er janvier 2004, un restaurateur décide d'augmenter tous les ans au 1er janvier les prix de sa carte de 3 %.

1. **a.** Quel est le prix, sur la carte 2004 d'un plat qui coûtait $9,50$ en 2003 ?
   b. Quel était le prix en 2003 d'un dessert qui cûte $6,90$ en 2004 ?
2. La carte du restaurateur proposait en 2003 une « Formule Midi » à $7,50$. On note P_n le prix en de la « Formule Midi » au 1er janvier de l'année (2003+n). (Ainsi $P_0 = 7,50$ pour 2003 ; P_1 pour 2004, etc ...)
   a. Calculer P_1 et P_2.
   b. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n. Quelle est la nature de cette suite ? Quelle est sa raison ?
   c. En déduire P_n en fonction de n.
   d. Combien coûtera la « Formule Midi » en 2010 ?
   e. A partir de quelle année le prix de la « Formule Midi » dépassera-t-il 10 ?

Pour voir le corrigé de l'exercice 1. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 1

Exercice 2 (13 points)

Le tableau ci-dessous récapitule les résultats d'une étude effectuée sur une semaine par un restaurateur en vue de connaître le coût moyen de production d'un repas en fonction du nombre de couverts servis.
Dans ce tableau, x_i désigne le nombre de couverts servis, et y_i désigne le coût moyen d'un repas en pour le $i$ème jour de la semaine. Par exemple : le deuxième jour de la semaine, pour un service de 15 couverts, chaque repas a coûté en moyenne $8,90$.

x_i	4	15	25	35	45	50
y_i	$19,30$	$8,90$	$6,50$	$6,40$	$7,20$	$8,10$

Partie A

1. Représenter sur du papier millimétré le nuage de points $(x_i; y_i)$. On prendra :
   - en abscisses : 1 cm pour 5 repas,
   - en ordonnées : 1 cm pour 2 .
2. Calculer les coordonnées de **G**, le point moyen du nuage et placer **G** sur le graphique.
3. Le restaurateur décide d'effectuer un ajustement affine du nuage par la droite D d'équation : $y = -0,2x + 15,2$.
   a. Tracer D sur le graphique.
   b. La droite D passe-t-elle par **G** ? (On justifiera la réponse par un calcul).
   c. Que pensez-vous de cet ajustement ? (Expliquer).

Partie B

On se propose dans cette partie d'effectuer un ajustement plus précis du nuage par la fonction f, définie sur $[\,4\,;\,50\,]$ par :

$$f(x) = 0,4x + 35 - 12\ln x$$

Dans la suite, les valeurs trouvées par calcul seront arrondies au centième près.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f et vérifier que :

$$f'(x) = \frac{0,4x - 12}{x}$$

2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[\,4\,;\,50\,]$ et dresser le tableau de variations de f.

3. Compléter le tableau suivant :

x	4	10	20	30	40	50
$f(x)$						

4. Représenter la fonction f dans le même repère que le nuage de points.

5. On considère que f réalise un bon ajustement du nuage de points.

a. Selon cet ajustement, pour quel nombre de couverts le coût moyen d'un repas est-il minimum ? Quel est ce coût minimum ?

b. En utilisant cet ajustement, déterminer graphiquement pour quels nombres de couverts le coût moyen d'un repas est inférieur à 7 . (On fera figurer les traits de construction de la réponse sur le graphique).

Pour voir le corrigé de l'exercice 2. cliquez sur le lien : Corrigé exercice 2

Corrigé Btn 2004

Exercice 1 (7 points)

1. **a.** L'augmentation de 3 % se traduit d'une année à l'autre par un coefficient multiplicateur $b = 1,03$. Le prix en 2004 est : $9,5 \times 1,03 =\approx \boxed{9,79}$

   b. Le prix en 2003 était de : $\dfrac{6,90}{1,03} \approx \boxed{6,70}$

2. **a.** D'après la question précédente, on a : $P_1 = 1,03 \times P_0 = 1,03 \times 7,50 \approx \boxed{7,73}$

   $P_2 = P_1 \times 1,03 = P_0 \times (1,03)^2 \approx \boxed{7,96}$

   b. Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme $P_0 = 7,50$ et de raison $b = 1,03$. On a donc :

   $$P_{n+1} = 1,03 \times P_n$$

   ce qui donne :

   $$\boxed{P_n = P_0 \times (1,03)^n = 7,50 \times (1,03)^n}$$

   c. En 2010, $n = 7$, on cherche donc : $P_7 = 7,50 \times (1,03)^7 \approx 9,22$.

   d. Il s'agit ici de résoudre l'inéquation :

   $$7,50 \times (1,03)^n \geqslant 10$$

   $$(1,03)^n \geqslant \frac{10}{7,50}$$

   $$(1,03)^n \geqslant \frac{4}{3}$$

   Par utilisation des Logarithmes :

   $$\ln(1,03)^n \geqslant \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

   $$n \ln 1,03 \geqslant \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

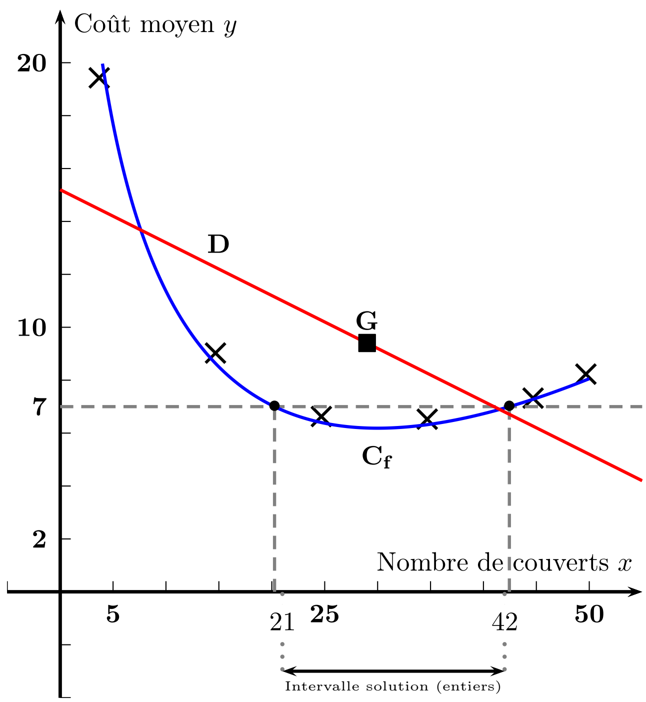
   $$n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln 1,03}$$

   Soit finalement : $\boxed{n \approx 10}$ ce qui donne l'année 2013.

Exercice 2 (13 points)

Partie A

1. Représentation du nuage :



2. Le point $G\,(29; 9,4)$ est placé en noir sur le graphique.

3. **a.** Voir ci-contre : D est tracée avec les points $(0; 15,2)$ et $(50; 5,2)$.

   b. D passe par G car : $-0,2 \times 29 + 15,2 = 9,4$. Les coordonnées de G vérifient l'équation de D.

   c. On observe que la forme du nuage (courbe) ne justifie pas cet ajustement affine. Ce qui était évident dès le début !

Partie B

1. On a : $f'(x) = 0,4 - 12 \times \dfrac{1}{x} = 0,4 - \dfrac{12}{x} = \dfrac{0,4x - 12}{x}$.
2. On constate que sur l'intervalle, $f'(x)$ s'annule si $x = 30$ et est du signe du binôme $0,4x - 12$. On obtient donc le tableau de variations :

x	4		30		50
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	≈ 20	$\searrow$	$\approx 6,20$ *min*	$\nearrow$	$\approx 8,10$

3. Le tableau de valeurs :

x	4	10	20	30	40	50
$f(x)$	$19,96$	$11,37$	$7,05$	$6,19$	$6,73$	$8,06$

4. Voir ci-dessus C_f en bleu.
5. **a.** D'après l'étude de f, le coût moyen est minimum pour $x = 30$ couverts et est d' $\approx 6,19$.

   b. On trace la droite $y = 7$ et on lit graphiquement les valeurs de x entières pour lesquelles la courbe C_f est au-dessous de cette droite : on obtient de 21 à 42 couverts.