

∞ BTS Groupement D¹ – mai 2021 ∞
 Métropole – Antilles–Guyane – Polynésie

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

10 points

Une usine agroalimentaire produit de la viande de bœuf hachée. On souhaite évaluer la durée de conservation de la viande de bœuf une fois hachée et conservée dans une chambre froide réglée à 0 °C.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

Voici le relevé du nombre de germes putréfiants par centimètre carré (cm²) tous les cinq jours à la surface d'un échantillon de viande de bœuf hachée conservée dans la chambre froide.

Nombre de jours de conservation t_i	0	5	10	15	20
Nombre N_i de germes putréfiants par cm ²	1 000	4 000	199 000	5 960 000	48 600 000

- On effectue un changement de variable logarithmique : $z_i = \ln(N_i)$.
Compléter le tableau donné en **annexe 1 à rendre avec la copie**. On arrondira les valeurs au dixième.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(t_i ; z_i)$ par la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$.
Les réels a et b seront arrondis au centième.
- Sur le graphique donné en **annexe 2 à rendre avec la copie** :
 - Placer les points $M_i(t_i ; z_i)$.
 - Tracer la droite D d'équation $z = 0,6t + 6,4$.
- On considère que la droite D est une droite d'ajustement du nuage de points $M_i(t_i ; z_i)$ et que ce modèle reste valable jusqu'au 30^e jour de conservation dans la chambre froide.
Donner une estimation du nombre de germes putréfiants par cm² sur l'échantillon de viande hachée si celui-ci est stocké et conservé pendant 25 jours dans la chambre froide. Arrondir au million

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = 600e^{0,6t}.$$

On admet que la fonction modélise le nombre de germe, par cm² sur la surface de la viande hachée conservée en chambre froide. Plus précisément, $f(t)$ est le nombre de germes par cm² sur la viande hachée après t jours de conservation dans la chambre froide à 0 °C

1. Analyses de biologie médicale, Bio analyses et contrôles, Biotechnologies, europlastics et composites, Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries, Métiers de l'eau

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
Calculer $f'(t)$ pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On définit le réel m par $m = \frac{1}{10-5} \int_5^{10} f(t) dt$.
 - a. Sans la calculer interpréter la valeur du réel m dans le contexte de l'exercice.
 - b. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - c. En déduire que $m = 200e^6 - 200e^3$.
5. On admet que la viande hachée peut être commercialisée si, lorsqu'elle quitte l'usine, la concentration de germes putréfiants à sa surface est strictement inférieure à 3 000 germes par cm^2 .
 - a. Résoudre l'inéquation $f(t) < 3000$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - b. En déduire si l'usine peut conserver la viande de bœuf hachée produite en chambre froide plus de deux jours avant de la commercialiser.
6. La viande hachée pourra ensuite être vendue à des particuliers tant que le nombre de germes par cm^2 ne dépassera pas 27 000.
On appelle durée limite de consommation le nombre maximal de jours pendant lesquels cette viande peut être vendue à des particuliers.
 - a. En précisant la démarche employée. donner la valeur numérique affichée par l'algorithme ci-dessous :

```

J ← 0
N ← 600
TantQue N ≤ 27000
    J ← J + 1
    N ← 600 * e0,6 * J
Fin Tant Que
Afficher J
  
```

- b. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice

EXERCICE 2**10 points****Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante**

Pour améliorer l'hygiène de baignade dans un spa, il est possible de traiter l'eau aux ultra-violets (UV). La lampe UV (Figure 1), placée dans une chambre de désinfection, diffuse des rayons ultra-violets en continu. En passant devant cette lampe, dans le système de filtration, l'eau est désinfectée et débarrassée des micro-organismes.

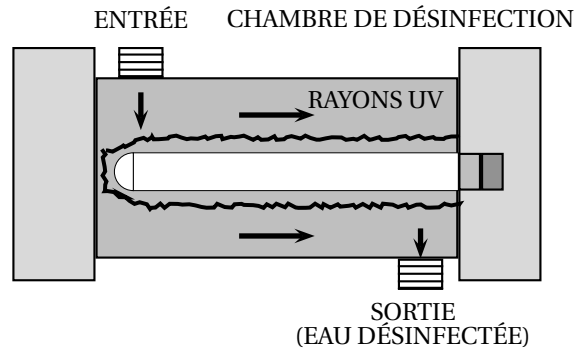


Figure 1. Schéma d'une chambre de désinfection équipée d'une lampe UV

Partie A

Les résultats seront donnés à 10^{-3} près

Une étude effectuée sur l'ensemble des spas installés par un fabricant indique que :

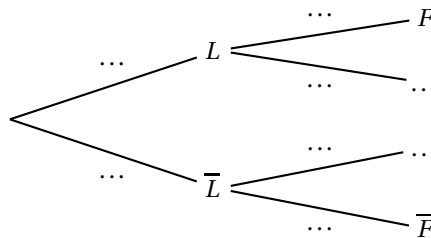
- 40 % des spas sont équipés de lampe UV et, parmi eux, 2 % présentent un problème de filtration;
- Parmi les spas, non-équipés de lampe UV, 15 % présentent un problème de filtration.

On choisit un spa au hasard parmi ceux installés par le fabricant.

On note :

- L l'évènement « le spa est équipé d'une lampe UV »;
- F l'évènement « le spa présente un problème de filtration »;
- \bar{L} et \bar{F} les évènements contraires respectifs des évènements L et F .

1. Recopier sur la copie l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Montrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,098.
3. Le spa choisi au hasard présente un problème de filtration. Calculer la probabilité que ce spa ne possède pas de lampe UV.
4. Lors d'une opération de maintenance sur un parc de 78 spas installés par le fabricant, un technicien comptabilise 12 spas présentant un problème de filtration.
 - a. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p des spas installés par ce fabricant qui présentent un problème de filtration.
 - b. Déterminer par un intervalle de confiance au seuil de 95 % cette proportion p .

Partie B

On constate statistiquement que la probabilité que la lampe UV d'un spa choisi au hasard tombe en panne au cours des trois premiers mois d'utilisation est $p = 0,03$.

On prélève au hasard un lot de 200 lampes UV dans la production de ce fabricant, jugée suffisamment importante pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On appelle X la variable aléatoire qui à un échantillon de 200 lampes UV de la production, associe le nombre de lampes UV de cet échantillon qui tomberont en panne lors des trois premiers mois d'utilisation.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Déterminer un arrondi à 10^{-3} de la probabilité $P(X \leq 10)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Partie C

On admet que la loi binomiale suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ .

1. Justifier que $\lambda = 6$.
On note alors, Y une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$.
2. Déterminer la valeur arrondie à 10^{-3} de la probabilité $P(Y = 1)$.
3. On admet que pour tout entier naturel $k \geq 1$, la probabilité de l'évènement « $Y = k$ » est donnée par :
$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{1 \times 2 \times \dots \times k}.$$
La proposition « $P(Y = 200) = 0$ » est-elle vraie ou fausse? Justifier.

Annexe 1 à rendre avec la copie : Exercice 1 - Partie A - Question 1

Nombre de jours de conservation t_i	0	5	10	15	20
Nombre N_i de germes putréfiants par cm^2	1 000	4 000	199 000	5 960 000	48 600 000
$z_i = \ln N_i$					

Annexe 2 à rendre avec la copie : Exercice 1 - Partie A - Question 3