# Brevet de technicien supérieur mai 2021 Groupement E

**Exercice 1** **10 points**

Un créateur conçoit un flacon contenu dans un écrin en forme de pyramide.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les points A$(6\,;0\,;0)$, B$(6\,;6\,;0)$ et C$(0\,;6\,;0)$.
On complètera, au fur à mesure, la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie.

1. On considère la pyramide régulière SOABC d'arête de longueur 6 cm représentée sur la figure de l'annexe.
   **a.** Placer le point S$'$au centre du carré OABC.
   **b.** On admet que la droite (SS$'$) est orthogonale au plan (OABC). Calculer la valeur exacte de la distance SS$'$.
   **c.** Déterminer les coordonnées du point S$'$ puis montrer que celles du point S sont S$\left(3\,;\,3\,;\,3\sqrt{2}\right)$.
2. On considère les points M, N, P, Q définis par :

$$\overrightarrow{\text{SM}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{SO}}\ ;\ \overrightarrow{\text{SN}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{SA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{SP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{SB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{SQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{SC}}.$$

   **a.** Placer les points M, N, P et Q sur la figure.
   On admet que SMNPQ est une pyramide à base carrée de hauteur $h = \frac{1}{3}\text{SS}'$.
   **b.** Calculer la longueur du côté du carré MNPQ.
   **c.** Calculer la valeur exacte du volume de la pyramide SMNPQ.
   (On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\frac{1}{3} \times B \times h$, où $B$ est l'aire de la base et $h$ la hauteur.)
3. On considère les points U$(2\,;0\,;0)$, V$(0\,;2\,;0)$ ainsi que le point W tel que $\overrightarrow{\text{OW}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{OS}}$.
   **a.** Déterminer les coordonnées du point W, puis celles des vecteurs $\overrightarrow{\text{WU}}$ et $\overrightarrow{\text{WV}}$.
   **b.** En déduire que le triangle UVW est rectangle isocèle.
   **c.** Déterminer les coordonnées du point R milieu du segment [UV].
   **d.** On admet que (OR) est une hauteur du tétraèdre OUVW.
   Calculer l'aire du triangle UVW puis le volume du tétraèdre OUVW.
4. Par tronçonnage en chaque sommet O, A, B, C, on enlève à la pyramide initiale un tétraèdre analogue au tétraèdre OUVW. Par tronçonnage en S, on enlève la pyramide SMNPQ. On obtient ainsi un solide inscrit dans la pyramide initiale. Ce solide représente un flacon.
   **a.** Sur la même figure, dessiner ce flacon en traits pleins en couleur.
   **b.** Calculer la valeur exacte de son volume.

**c.** Donner la nature géométrique de chacune des faces de ce flacon.

**EXERCICE 2** **10 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$\text{A}(6 ; 2) ; \text{B}(3 ; 5) ; \text{C}(0 ; 4) \text{ et } \text{D}(9 ; -1).$$

L'objectif est de tracer la courbe de Bézier associée aux points de contrôles A, B, C et D.

**1.** On note $\Gamma$ la courbe de Bézier associée aux points de contrôles A, B, C et D.

**a.** Sans effectuer de calcul, peut-on affirmer que la courbe $\Gamma$ passe par A ? par B ? par C ? par D ?

**b.** Quelle(s) tangente(s) à la courbe $\Gamma$ peut-on connaître sans effectuer aucun calcul ?

**2.** La courbe $\Gamma$ est l'ensemble des points $M(t)$ tels que, pour tout $t$ de l'intervalle $[0; 1]$ :

$$\overrightarrow{\text{O}M(t)} = (1-t)^3\overrightarrow{\text{OA}} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{\text{OB}} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{\text{OC}} + t^3\overrightarrow{\text{OD}}.$$

**a.** Démontrer que les coordonnées $x$ et $y$ des points $M(t)$ de cette courbe ont pour expression :

$$x = f(t) = 12t^3 - 9t + 6 \quad \text{et} \quad y = g(t) = -12t^2 + 9t + 2.$$

**b.** Étudier les variations des fonctions $f$ et $g$ définies pour $t$ dans l'intervalle $[0; 1]$ par : $f(t) = 12t^3 - 9t + 6$ et $g(t) = -12t^2 + 9t + 2$.
Rassembler les résultats dans un tableau unique.

**c.** *Cette question est un questionnaire à choix multiples.*
*Une seule réponse est correcte.*
*Recopier sur la copie la réponse qui vous parait correcte.*
*On ne demande aucune justification.*

*La réponse correcte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

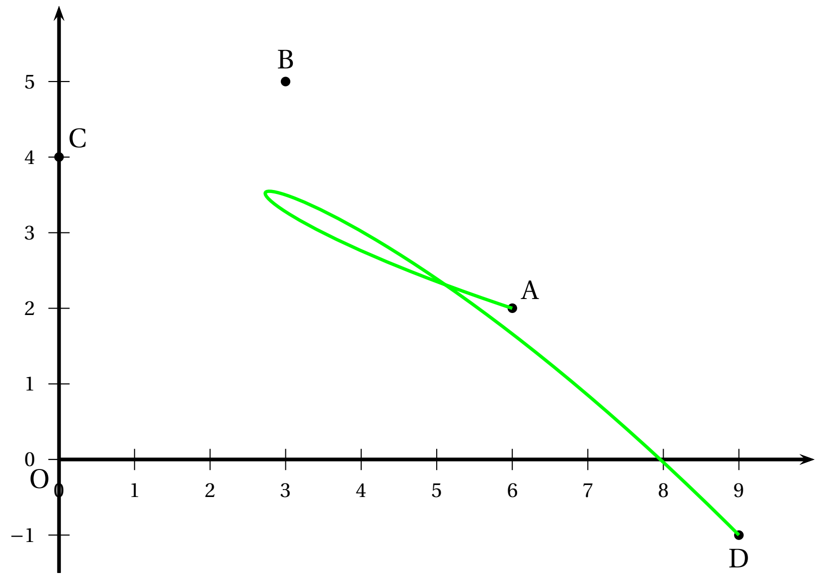
La courbe $\Gamma$ admet au point S, obtenu pour $t = \dfrac{1}{2}$, une tangente de vecteur directeur :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3\vec{\imath} + 3,5\vec{\jmath}$ | $\dfrac{1}{2}\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ | $\vec{\imath}$ | $\vec{\jmath}$ |

**3.** Tracer avec précision, sur la copie, les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{DC}}$, les tangentes au point S et au point de paramètre $t = \dfrac{3}{8}$, puis la courbe $\Gamma$.

**4.** Un étudiant a voulu tracer la courbe $\Gamma$ à l'aide d'un logiciel, en y entrant les points de contrôle.

**Ce tracé, donné ci-dessous, est faux**.




En s'aidant de considérations graphiques, expliquer l'erreur que cet étudiant a pu commettre en entrant les informations dans le logiciel.

**DOCUMENT-REPONSE À RENDRE AVEC LA COPIE**