CAPLP Concours externe et CAFEP
Section : Mathématiques – Physique–Chimie Session 2021
Épreuve écrite sur dossier de mathématiques

Durée : 4 heures

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Le premier exercice est un vrai-faux avec justification.
Le deuxième exercice est un exercice de nature pédagogique.
Le troisième exercice est constitué de deux parties.

Exercice 1

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit (u_n) la suite de nombres réels telle que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
PROPOSITION : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

2. Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante.
PROPOSITION : La suite (u_n) converge vers 0.

3. PROPOSITION : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1} = \frac{n}{n+1}$.

4. Soit (u_n) la suite de nombres réels telle que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.
PROPOSITION : La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

5. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
PROPOSITION : Si f est strictement croissante sur I, alors f', est strictement positive sur I.

6. PROPOSITION : Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

PROPOSITION : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

8. Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$.
PROPOSITION : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

9. Pour tout réel x, on note $D(x)$ le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$
PROPOSITION : $D(x)$ est nul si et seulement si $x = 1$.

10. On lance cinq fois un dé équilibré (six faces équiprobables numérotées de1 à 6).
PROPOSITION : La probabilité d'obtenir exactement une fois la face « 6 » est égale à $\dfrac{5}{6}$.

11. Soit n un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n$ des réels. On note m la moyenne de la série statistique $(x_1, \ldots, x_n)$ et s son écart type. Pour tout $i \in [\![\,;\, n]\!]$, on pose $y_i = 2x_i + 3$.

PROPOSITION : La série statistique $\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ a pour moyenne $2m + 3$ et pour écart type $2s + 3$.

12. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

PROPOSITION : La probabilité de l'événement $(X < \ln(9))$ est égale à $\dfrac{1}{3}$.

13. Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C, D d'affixes 1, i, -1, $-$i.

On note Γ le cercle unité, c'est-à-dire l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $|z| = 1$.

Si M est un point de Γ,on note $p(\text{M})$ le produit des distances de M aux points A, B, C, D :

$$p(\text{M}) = \text{MA} \times \text{MB} \times \text{MC} \times \text{MD}.$$

PROPOSITION : Lorsque M décrit Γ, le maximum de $p(\text{M})$ est égal à 2.

14. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, soit A le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ et B le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

PROPOSITION : L'ensemble des points M du plan tels que $\text{MA} = \text{MB}\sqrt{2}$ est un cercle de rayon 2.

15. Dans l'espace affine muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la sphère $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - 2y + z - 4 = 0$.

PROPOSITION : L'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{P}$ est un cercle de rayon 3.

Exercice 1

Cet exercice de type pédagogique a pour objectif l'analyse d'une activité de statistique, inspirée d'un document titré « Mettre des gants », disponible sur le site Éduscol.
L'analyse demandée nécessite les annexes suivantes fournies en fin de sujet :

- annexe 1 : énoncé de l'activité;
- annexe 2 : extraits des programmes des classes de seconde et de première professionnelles;
- annexe 3 : extrait du préambule des programmes des classes de seconde et première professionnelles.

1. À quel niveau de classe peut -on proposer l'exercice présenté en annexe 1?

2. Quelles capacités et connaissances du programme de cette classe un élève doit-il mobiliser pour résoudre cet exercice?

3. Quels sont les prérequis nécessaires à sa résolution?

4. Citer deux des cinq compétences figurant dans le tableau de l'annexe 3, que cet exercice permet de travailler particulièrement. Argumenter la réponse.

5. Proposer une correction de cet exercice, telle qu'elle pourrait figurer dans le cahier d'un élève.

6. Citer trois difficultés qu'un élève pourrait rencontrer et proposer pour chacune d'elles une question intermédiaire qui pourrait l'aider à les surmonter.

7. On s'intéresse à une série statistique à deux variables $\left(x_i,\, y_i\right)_{1\leqslant i.\leqslant n}$, où n est un entier naturel.
Dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère le nuage formé par les n points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$. On suppose que ces points n'appartiennent pas à une droite parallèle à l'axe $\left(\text{O},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On souhaite réaliser un ajustement affine de ce nuage de points par une droite $\mathscr{D}$, d'équation réduite $y = ax + b$, où a et b sont deux réels. On note P_i le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse x_ii et $S(a,\, b)$ la somme des carrés des distances M_iP_i :

$$S(a,\, b) = \sum_{i=1}^{n} M_iP_i^2.$$

a. Montrer que

$$S(a,\, b) = a^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + nb^2 - 2a\sum_{i=1}^{n} x_iy_i - 2b\sum_{i=1}^{n} y_i + 2ab\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

b. On admet qu'il existe une unique droite $\mathscr{D}$ pour laquelle la somme $S(a,\, b)$ est minimale. Cette droite est appelée droite de régression de y en x de la série $\left(x_i,\, y_i\right)_{1\leqslant i.\leqslant n}$.
Soit S la fonction de deux variables réelles définie, pour tout couple $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$S(a,\, b) = \sum_{i=1}^{n} M_iP_i^2,$$

En tout point de $\mathbb{R}^2$, S admet une dérivée partielle d'ordre un par rapport à a et une dérivée partielle d'ordre un par rapport à b.
On admet que le minimum de S est obtenu lorsque ces deux dérivées partielles sont nulles.

Montrer qu'une première condition pour que la fonction S admette un minimum est :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = nb + a\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

c. En déduire que le point moyen $G\left(\overline{x},\, \overline{y}\right)$ du nuage de points appartient à la droite $\mathcal{D}$.(On note $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les moyennes des séries statistiques $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\left(y_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

d. Montrer qu'une seconde condition pour que la fonction S admette un minimum est :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

-

e. Montrer que les nombres a et b pour lesquels la fonction S admet un minimum sont : n Lxiy, - nxji i=l

$$a = -\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x_i}^2} \quad \text{et} \quad b = \overline{y} - a\overline{x}.$$

f. On considère la série statistique à deux variables $\left(x_i,\, y_i\right)$ constituée à partir du tableau de l'activité de l'annexe 1.

Les valeurs x_i représentent la température de l'air en °C, et les valeurs y_i représentent la température ressentie correspondante, en °C, pour un vent soufflant à 50 km/h.

i	1	2	3	4	5
x_i	-10	-5	0	5	10
y_i	-23	-14	$-7{,}5$	-1	5,5

i. Calculer a et b.

ii. À l'aide de la droite de régression de y en x de la série $\left(x_i,\, y_i\right)_{1\leqslant i\leqslant 5}$, en déduire la température de l'air à partir de laquelle des lésions irréversibles peuvent apparaître sur les mains du conducteur d'un scooter roulant sans gants à 50 km/h pendant plus de 30minutes.

Exercice 3

Introduction

Dans tout l'exercice, on suppose que T est une variable aléatoire réelle de densité f. On suppose de plus que f est nulle sur $]-\infty~;~0[$, strictement positive sur $]0, +\infty[$ et que sa restriction à $[0~;~+\infty[$ est continue.
On rappelle les résultats suivants :

- Du fait que f est une densité, et qu'elle est nulle sur $]-\infty~;~0[$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

- Si θ_1 et θ_2 sont deux réels tels que $\theta_1 \leqslant \theta_2$, alors

$$P\left(\theta_1 \leqslant T \leqslant \theta_2\right) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- La fonction de répartition de T est la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad F(\theta) = P(T \leqslant \theta) = \int_{-\infty}^{\theta} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\theta} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- L'espérance de la variable aléatoire T est donnée par

$$E(T) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

sous réserve que cette intégrale converge.

A. Fonction de survie et taux de défaillance

On appelle durée de vie d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle.
On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T ayant les propriétés mentionnées dans l'introduction.
On appelle *fonction de survie* du composant la fonction S définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+, \quad S(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - F(\theta).$$

Pour tout réel t positif, on appelle *taux de défaillance* à l'instant t le nombre $\pi(t)$ défini par

$$\pi(t) = \frac{f(t)}{S(t)}.$$

1. Soit t un réel positif.
Pour tout réel strictement positif h, on note $q(t,~h)$ la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants t et $t+h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant t, c'est-à-dire le nombre $q(t,~h)$ défini par

$$q(t,~h) = P_{[T>t]}(t < T <\leqslant t+h).$$

a. Établir pour tout réel h strictement positif, l'égalité : $q(t,~h) = \dfrac{S(t) - S(t+h)}{S(t)}$.

b. Montrer que la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et préciser sa fonction dérivée.

c. Montrer que le rapport $\dfrac{q(t,h)}{h}$ h a pour limite $\pi(t)$ quand h tedn vers 0 par valeurs supérieures.

2. On suppose, dans cette question, que λ est un réel strictement positif et que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que T admet alors pour densité la fonction f donnée par $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ pour $t \geqslant 0$ et $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

a. Rappeler la valeur de l'espérance de T, notée $E(T)$, et justifier ce résultat par le calcul.

b. Déterminer la fonction de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative.

c. Établir, pour tout réel t positif, l'égalité $\pi(t) = \dfrac{1}{E(T)}$.

3. On suppose dans cette question que T est une variable aléatoire de densité f définie par

$$f(t) = \left\{\begin{array}{lll} t\exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right) & \text{si} & t \geqslant 0\\ 0 & \text{si} & t < 0\end{array}\right.$$

a. Vérifier que f est une densité de probabilité.

On rappelle que la loi normale d'espérance nulle et de variance 1 a pour densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

b. En déduire les égalités : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t$.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire T.

d. Montrer que la variable aléatoire T^2 suit une loi exponentielle et préciser son paramètre. En déduire la variance de la variable aléatoire T.

e. Déterminer la fonction de survie S du composant.

f. Calculer, pour tout réel t positif, le taux de défaillance $\pi(t)$.

4. On suppose dans cette question qu'il existe une constante a strictement positive telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \pi(t) = \alpha.$$

a. Montrer que, pour tout réel t positif, $S'(t) = -\alpha S(t)$.

b. Soit g la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel t positif, $g(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} S(t)$.

Montrer que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}_+$.

c. En déduire que T suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.

B. Entretien préventif

On désire, dans cette partie, comparer le coût de deux méthodes d'entretien. On suppose que la variable aléatoire T admet une espérance (nécessairement strictement posi- tive) notée E(T) et représentant donc la durée moyenne de fonctionnement d'un composant.

On considère que la panne d'un composant provoque un préjudice de coût C, et que son remplacement a un coût K,où C et K sont deux constantes strictement positives.

Une *première méthode* consiste à attendre la panne pour procéder au remplacement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné par :

$$c_1 = \frac{K+C}{E(T)}.$$

Une *deuxième méthode* d'entretien consiste à se fixer un réel θ strictement positif et à remplacer le composant dès sa panne si elle survient au bout d'une durée de fonctionnement inférieure à θ, sinon à le remplacer préventivement au bout d'une durée θ de fonctionnement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné en fonction de θ par :

$$c_2(\theta) = \frac{K + (1 - S(\theta))C}{\displaystyle\int_0^{\theta} S(t)\,\mathrm{d}t}.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout réel $\theta > 0$,

$$\int_0^{\theta} S(t)\,\mathrm{d}t = P(T > \theta) \times \theta + P(T \leqslant \theta) \times \int_0^{\theta} t\frac{f(t)}{F(\theta)}\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\theta} S(t)\,\mathrm{d}t$ peut donc s'interpréter comme la durée moyenne de fonctionnement du composant dans la deuxième méthode.

2. Dans le cas où T suit la loi exponentielle de paramètre λ, calculer c_1 et, pour tout réelθ strictement positif, exprimer $c_2(\theta)$ en fonction de C, K et λ.

Indication : utiliser la question A.2.

Montrer qu'alors la deuxième méthode ne présente pas d'avantage. Comment peut-on expliquer ce résultat ?

3. On suppose que T suit la loi décrite dans la question A. 3.

a. Préciser la valeur de c_1 et montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{\theta\to+\infty} c_2(\theta) = c_1$.

b. On pose pour tout réel strictement positif θ,

$$\varphi(\theta) = C\int_0^{\theta} \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{\theta}\left[K + C\left(1 - \exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\right)\right)\right].$$

Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$et que sa fonction dérivée est strictement positive.

En déduire le tableau de variations de φ en y portant les limites aux bornes.

c. Étudier les variations de la fonction c_2 et montrer qu'elle admet un minimum en θ_0 qui vérifie $c_2(\theta_0) < c_1$.

d. Établir l'égalité $c_2(\theta_0) = C\theta_0$ puis l'inégalité $\theta_0 < \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(1 + \dfrac{K}{C}\right)$.

e. On suppose, dans cette question, que K et C sont tous deux égaux à 1, et on donne :

$$c_2(1,5) = 1{,}5429 \quad \text{et} \quad c_2(1,45) = 1{,}5439.$$

En déduire un encadrement de θ_0 d'amplitude $0,1$.

Annexe 1

Énoncé de l'activité

Lorsqu'il y a du vent, la température ressentie est différente de la température de l'air. Le tableau ci-dessous donne la température ressentie, pour différentes températures de l'air, en prenant en compte la vitesse du vent.

Vitesse du vent (en km/h) / Température de l'air (en ° C)	0	10	20	30	40	50
-10	-10	-15	-18	-20	-21	-23
-5	-5	$-9,5$	-12	-13	-13	-14
0	0	-3	-5	$-6,5$	-7	$-7,5$
5	5	3	1	0	-0,5	-1
10	10	9	7,5	7	6	5,5

Exemple : si la température de l'air est -10° C et qu'il y a un vent soufflant à 30 km/h, la température ressentie est -20° C.
Des lésions irréversibles peuvent apparaître aux extrémités (mains, pieds, nez et oreilles) si elles sont soumises plus de 30 minutes à des températures inférieures à -25° C.
On admet que la température ressentie par le conducteur d'un scooter à 50 km/h est la même que celle donnée dans le tableau ci-dessus, pour un vent soufflant à 50 km/h.
À partir de quelle température de l'air des lésions irréversibles peuvent-elles apparaître sur les mains du conducteur d'un scooter roulant sans gants pendant plus de 30 minutes à 50 km/h ?

Annexe 2

Extraits des programmes des classes de seconde et de première professionnelles

Classe de seconde professionnelle
Statistique à une variable
Objectifs

L'objectif de ce module est de favoriser la prise d'initiative et la conduite de raisonnements pour interpréter, analyser ou comparer des séries statistiques. Pour ce faire, on s'appuie sur des situations concrètes liées aux spécialités professionnelles ou issues de la vie courante. Des données réelles sont à privilégier. L'utilisation des outils numériques est nécessaire. Ce module est particulièrement propice aux changements de registres (textes, tableaux, graphiques) qui participent au renforcement de la maîtrise de la langue.

Liens avec le cycle 4

Au cycle 4, les élèves ont appris à recueillir, organiser, interpréter, représenter et traiter des données, à utiliser un tableur-grapheur pour présenter des données sous la forme d'un tableau ou d'un diagramme. Ils ont également appris à calculer des effectifs et des fréquences, à calculer et à interpréter des indicateurs de position et de dispersion d'une série statistique. Ils ont étudié moyenne, médiane et étendue.
En seconde, ils consolident ces notions et découvrent d'autres représentations et indicateurs permettant de comparer des séries statistiques. Ils découvrent la notion d'intervalle comme ensemble de nombres vérifiant des inégalités.

Capacités	Connaissances
Recueillir et organiser des données statistiques.	Regroupement par classes d'une série statistique.
Organiser des données statistiques en choisissant un mode de représentation adapté à l'aide des fonctions statistiques d'une calculatrice ou d'un tableur. Extraire des informations d'une représentation d'une série statistique.	Représentation d'une série statistique par un diagramme en secteurs, en bâtons, en colonnes, à lignes brisées.
Comparer et interpréter des séries statistiques à l'aide d'indicateurs de position et de dispersion calculés avec les fonctions statistiques d'une calculatrice ou d'un tableur.	Indicateurs de position : mode, classe modale, moyenne, médiane, quartiles. Indicateurs de dispersion : étendue, écart type, écart interquartile $Q_3 - Q_1$.
Construire le diagramme en boîte à moustaches associé à une série statistique avec ou sans TIC. Comparer et interpréter des diagrammes en boîte à moustaches.	Diagrammes en boîte à moustaches

Exemple d'algorithme
Déterminer la fréquence d'apparition d'une lettre dans un texte.

Commentaires
Les déciles et les centiles peuvent être présentés lorsque leur étude est pertinente pour la situation traitée.