Corrigé de l'exercice 1.

1. **a.** Le triangle OLM est rectangle en L, on a donc d'après le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OL^2 + OM^2 \text{ soit } d^2 = (R+a)^2 - R^2 = 2Ra + a^2$$

On en déduit que $d = \sqrt{2Ra + a^2} \approx 52701$ m.

b. Le triangle OLM étant rectangle, on a $\sin(\widehat{O}) = \dfrac{R}{R+a}$, donc $\widehat{O} = \arccos\left(\dfrac{R}{R+a}\right)$.

On en déduit que $\widehat{NL} = \dfrac{\arccos\left(\frac{R}{R+a}\right)\pi}{180} \times R \approx 52700$.

Les deux valeurs sont proches au mètres près.

c. $d' = \sqrt{2Ra} \approx 52700$. Là aussi les deux distances sont très proches, avec $d > d'$.

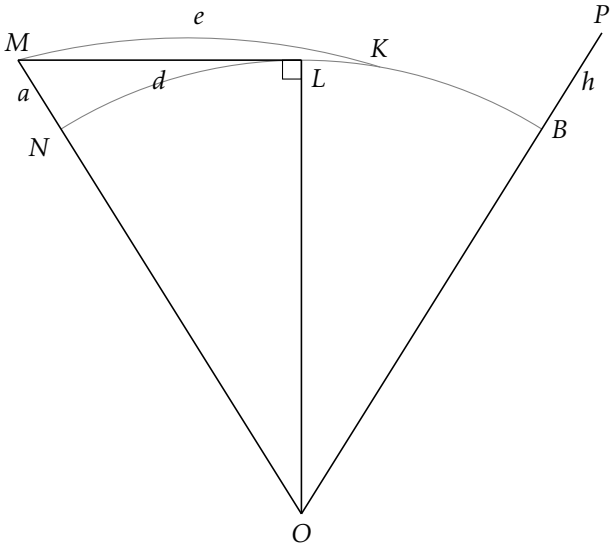

Figure 1

2. On calcul la distance $\widehat{LB} = 165\,300$ m. Puis on détermine l'angle $\widehat{LOB} = \dfrac{180 \times \widehat{LB}}{\pi R}$.

On a alors, en notant x la hauteur au dessus du niveau de la mer, vue depuis Monticello :

$$\cos\left(\widehat{LOB}\right) = \frac{R}{R+x}$$

Soit $x = R\left(\dfrac{1}{\cos\left(\widehat{LOB}\right)} - 1\right) \approx 2145 > 2053$.

Et on ne devrait pas voir le Mont Prado depuis Monticello.

3. **a.** $e = 57846$ m.

b. $e' = \sqrt{\dfrac{2Rx}{0.83}}$, avec $x = BS$.

c. On a donc $e + e' = 215 \times 10^3$, soit $e' = 215 \times 10^3 - e$.

Donc $\sqrt{x} = \sqrt{\dfrac{0,83}{2R}} 215 \times 10^3 - \sqrt{a}$.

Donc $x = \left(\sqrt{\dfrac{0,83}{2R}} 215 \times 10^3 - \sqrt{a}\right)^2 \approx 1609$ m.

Il reste donc 444 m de hauteur visible.

Corrigé de l'exercice 2.

1. 5 contremarches entraînent 4 marches. On a donc $\Delta x = 4 \times 30 = 120$. D'autre part $x + 2y = 65$, d'où $y = \dfrac{65 - 30}{2} = 17,5$. On en déduit que $\Delta y = 5 \times 17,5 = 87,5$.

2. **a.** Soit n le nombre de marches, $n+1$ est alors le nombre de contremarches. $x = \dfrac{\Delta x}{n} = \dfrac{25}{n}$ et $y = \dfrac{\Delta y}{n+1} = \dfrac{40}{n+1}$, on en déduit que :

$$\frac{25}{n} + \frac{80}{n+1} = 65 \text{ soit } 13n^2 - 8n - 5 = 0.$$

Cette équation a une racine évidente $n = 1$, et on déduit la seconde $n = \dfrac{5}{13}$ non entière.

On peut donc fabriquer un escalier idéal, avec une marche de longueur $x \geqslant 25$ et deux contremarches de hauteur $y = 20 > 0$.

b. L'affirmation est fausse comme le prouve la question précédente.

3. **a.** $x = 25$ et $y = 21$, on a alors $x + 2y! = 65$.

b. n doit être supérieur à 2, donc le nombre de marche au moins égal à 2. Mais alors, $x = \dfrac{\Delta x}{n} \leqslant 12,5$. Ce qui est contraire au règle de François Blondel.

4. Soit x la longeur de la marche, elle doit vérifier $x + 32 = 65$, soit $x = 33 > 27$. On peut construire un escalier idéal avec $x = 33$ et $y = 16$. L'angle $\alpha = \arctan\left(\dfrac{16}{33}\right) \approx 26$.

5. **a.** Le nombre de contremarche est n, donc le nombre de marche est $n-1$. On en déduit que $x = \dfrac{\Delta x}{n-1}$ et $y = \dfrac{\Delta y}{n}$. Et x et y doivent vérifier :

$$x + 2y = 65 \text{ soit } \frac{\Delta x}{n-1} + 2\frac{\Delta y}{n} = 65.$$

b. On a $\dfrac{\Delta y}{n} < \dfrac{\Delta y}{n-1}$, pour $n > 1$. On en déduit que

$$65 = \frac{\Delta x}{n-1} + 2\frac{\Delta y}{n} < \frac{\Delta x}{n-1} + 2\frac{\Delta y}{n-1}, \text{ d'où } 65(n-1) < \Delta x + 2\Delta y.$$

D'autre part $x + 2y = 65$ et $y \geqslant 25$, donc $2y = \dfrac{\Delta y}{n} \leqslant 40$. Mais $y > 0$, donc $x = \dfrac{\Delta x}{n-1} < 65$.
On a donc $\Delta x + 2\Delta y \leqslant 65(n-1) + 40$.
Finalement, on a :

$$65(n-1) < \Delta x + 2\Delta y \leqslant 65(n-1) + 40.$$

c. Supposons que nous ayons un escalier idéal pour un nombre n de contremarches. Si il existe un autre escalier idéal ayant un nombre m de contremarches.
Si $n < m$, alors $x_m < x_n$ et $y_m < y_n$ et donc $x_m + 2y_m < 65$. Ce qui est contradictoire.
Si $m < n$, on aura $x_m + 2y_m > 65$.
On ne peut pas avoir deux escaliers idéaux pour un Δx et un Δy fixes.

d. On a $x+2y = 65$, soit en multipliant par $n-1$: $x(n-1)+2(n-1y) = 65(n-1)$.
Or $x(n-1) = \Delta x$ et $2(n-1)y = \Delta y - 2y$. Donc $\Delta x + \Delta y = 65(n-1) + 2y$.
On en déduit que $2\dfrac{\Delta y}{n} = \Delta x + \Delta y - 65(n-1)$. On a $\Delta x \geqslant 25(n-1)$ et $\Delta y > 0$.
Réciproquement, si $2\dfrac{\Delta y}{n} = \Delta x + \Delta y - 65(n-1)$ et $\Delta x \geqslant 25(n-1)$ et $\Delta y > 0$.
De $2\dfrac{\Delta y}{n} = \Delta x + \Delta y - 65(n-1)$ on tire que $\dfrac{\Delta x}{n-1} + 2\dfrac{\Delta y}{n} = 65$, puis $x + 2y = 65$.
Les deux inégalités assurent que $x \geqslant 25$ et $y > 0$. Donc l'escalier est idéal.

e. n doit vérifier :

$$2 \times \frac{289}{n} = 496 + 2 \times 289 - 65(n-1) \text{ soit } 65n^2 - 1139n + 578 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 1147041$, dont la racine est 1071. Il y a deux solutions, $n = 17$ et $n = \dfrac{34}{65}$. Seul la première solution est envisagable.
Donc, on peut construire un escalier parfait avec $\Delta x = 496$ et $\Delta y = 289$, on a alors 16 marches de longueur 31 et 17 contremarches de hauteur 17.

f. Il faut traduire la condition $2\dfrac{\Delta y}{n} = \Delta x + 2\Delta y - 65(n-1)$ sous une forme exploitable.
On commence par déterminer le seul n possible : la partie entière de $\dfrac{\Delta x + 2\Delta y}{65}$. D'autre par la partie décimale r de ce nombre doit vérifier : $0 < r \leqslant \dfrac{40}{65}$.

Cela donne donc (en python) :

```
Dx = 496
Dy = 289
# Partie entière en python
n = int((Dx+2*Dy)/65)+1
r = ((Dx+2*Dy)/65) - int((Dx+2*Dy)/65)

if 0 < r and r <= 40/65 and n > 1:
    x = Dx/(n-1)
    y = Dy/n
    print("un escalier idéal est possible :")
    print("{} marches, x = {}, y ={}".format(n,x,y))
else :
    print("Pas d'escalier idéal")
```

Ce programme fournit bien $n = 17$, $x = 31$ et $y = 17$.

On pourrait aussi faire une boucle sur n qui teste la condition de la question 5f et qui pour chaque n vérfie si $x < 25$. Dans ce cas on provoque un break. La boucle se termine toujours (soit avec un escalier idéal, soit avec x inférieur à 25).