∽ CONCOURS AVENIR - 8 MAI 2011 ∾

DURÉE : 1 h 30 min

CONSIGNES SPÉCIFIQUES

Lire attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve :
Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti. La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale S.
Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale.
Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon. L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.
Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.
Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème :
Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, **chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points**, tandis que **chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'un point**.

ÉTUDE DE FONCTIONS

Soient f et g les fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ respectivement définies par :

$$f(x) = -2\ln(x) + 2 + x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-x^2 - 2\ln(x)}{x}.$$

1. La dérivée de f est définie par : $f'(x) =$

a. $\dfrac{2x^2 - 2}{x}$

b. $\dfrac{2x^2 + 2}{x}$

c. $\dfrac{-2x^2 - 2}{x}$

d. Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2 est :

a. $y = f'(x)(x-2) + f(2)$

b. $y = f'(x)(x-2) - f(2)$

c. $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

d. $y = f(2)(x-2) + f'(2)$

3. La dérivée de g est définie par : $g'(x) =$

a. $-2x - \dfrac{2}{x}$

b. $\dfrac{f(x)}{x^2}$

c. $-\dfrac{f(x)}{x^2}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

4. Le minimum de f est égal à :

a. 1

b. 3

c. 0

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

5. $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) =$

a. e

b. $\mathrm{e} + 1$

c. $\mathrm{e} - 1$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

6. $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) =$

a. 0

b. 2

c. $-\infty$

d. $+\infty$

7. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) =$

a. $-\infty$

b. $+\infty$

c. n'existe pas

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

8. L'asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de g a pour équation réduite :

a. $y = -x - 2$

b. $y = -x$

c. $y = x + 2$

d. $y = x$

9. $\mathscr{C}_g$ est strictement en dessous de la droite d'équation $y + x = 0$ si et seulement si x appartient à :

a. $]0~;~1[$

b. $]1~;~+\infty[$

c. $]0~;~+\infty[$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

10. Le nombre de solutions à l'équation $g(x) = 0$ est égal à :

a. 0

b. 1

c. 2

d. 3

PROBABILITÉS ET VARIABLES ALÉATOIRES

Charly participe à un tournoi où il est opposé à Ali puis à Béatrice

On note A l'évènement : « Charly bat Ali »
B l'évènement : « Charly bat Béatrice »
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ leurs évènements contraires respectifs
et X la variable aléatoire correspondant au nombre de victoires de Charly

Sachant que $P(A) = \dfrac{2}{5}$, que $P_A(B) = \dfrac{7}{10}$ et que $P(B) = \dfrac{12}{25}$, on peut alors affirmer que :

11. $P\left(A \cap \overline{B}\right) =$

a. $\dfrac{3}{25}$

b. $\dfrac{5}{25}$

c. $\dfrac{7}{25}$

d. $\dfrac{9}{25}$

12. $P_{\overline{A}}(B) =$

a. $\dfrac{1}{5}$

b. $\dfrac{1}{4}$

c. $\dfrac{1}{3}$

d. $\dfrac{1}{2}$

13. $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) =$

a. $\dfrac{1}{5}$

b. $\dfrac{2}{5}$

c. $\dfrac{3}{5}$

d. $\dfrac{4}{5}$

14. $P_{\overline{B}}(A) =$

a. $\dfrac{5}{12}$

b. $\dfrac{7}{12}$

c. $\dfrac{3}{13}$

d. $\dfrac{10}{13}$

15. $P(A\cup B) =$

a. $\dfrac{7}{25}$

b. $\dfrac{15}{25}$

c. $\dfrac{22}{25}$

d. $\dfrac{29}{25}$

16. $P(X=2) =$

a. $P(A\cap B)$

b. $P\left(\overline{A}\cap B\right)$

c. $P(A\cap\overline{B})$

d. $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$

17. $P(X=1) =$

a. $\dfrac{3}{25}$

b. $\dfrac{5}{25}$

c. $\dfrac{8}{25}$

d. $\dfrac{10}{25}$

18. $\mathrm{E}(X) =$

a. $\dfrac{19}{25}$

b. $\dfrac{22}{25}$

c. $\dfrac{25}{25}$

d. $\dfrac{28}{25}$

COMPLEXES ET ÉCRITURE EXPONENTIELLE

Soient les nombres complexes z_1 et z_2 tels que : $z_1 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $z_2 = -3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.

19. Alors :

- **a.** $z_1 = z_2$
- **b.** $z_1 = -z_2$
- **c.** $z_1 = \overline{z_2}$
- **d.** $z_1 = -\overline{z_2}$

20. Alors : $z_1 + z_2$ est un

- **a.** réel strictement positif
- **b.** réel strictement négatif
- **c.** imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive
- **d.** imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative

21. Alors : z_1^{24} est un

- **a.** réel strictement positif
- **b.** réel strictement négatif
- **c.** imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive
- **d.** imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative

22. Alors : z_2^{36} est un

- **a.** réel strictement positif
- **b.** réel strictement négatif
- **c.** imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive
- **d.** imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative

COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

Dans un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_{\mathrm{A}} = 2 - \mathrm{i}$; $z_{\mathrm{B}} = -3 - 2\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = \mathrm{i}$.

23. L'affixe du point D tel que DBAC soit un parallélogramme, est égale à :

- **a.** $-1 - 4\mathrm{i}$
- **b.** -5
- **c.** $5 + 2\mathrm{i}$
- **d.** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

24. L'affixe de l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ est égale à :

- **a.** $-1 + 2\mathrm{i}$
- **b.** -5
- **c.** $5 + 2\mathrm{i}$
- **d.** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

25. L'affixe de l'image du point A par la rotation de centre C et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est égale à :

- **a.** $-2 - \mathrm{i}$
- **b.** $2 + 3\mathrm{i}$
- **c.** $-2 + 3\mathrm{i}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

26. L'affixe de l'image du point C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{3}{2}$ est égale à :

a. $4-3\text{i}$

b. $3-2\text{i}$

c. $-1+2\text{i}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

DIVERS

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \text{e}^{-\frac{x}{2}} - 1$.

27. $f(x) \leqslant 0$ sur :

a. $[0\ ;\ +\infty[$

b. $]-\infty\ ;\ 0]$

c. $\mathbb{R}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

28. La primitive F de f telle que $F(0) = 1$ est définie par $F(x) =$

a. $-0,5\text{e}^{-0,5x} - x + 1,5$

b. $-2\text{e}^{-0,5x} - x$

c. $-2\text{e}^{-0,5x} - x + 3$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

29. f est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) =$

a. $-0,5\text{e}^{-0,5x} - x$

b. $-0,5\text{e}^{0,5x} - 1$

c. $-2\text{e}^{-0,5x}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

30. Pour tout réel x appartenant à $[-3\ ;\ -1]$, $\ln[f(x)] =$

a. $\dfrac{-1}{2}$

b. $\dfrac{-3}{2}$

c. 0

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

31. La fonction $x \longmapsto f(x) - f(-x)$ est :

a. paire non impaire

b. impaire non paire

c. paire et impaire

d. ni paire ni impaire

32. La fonction $x \longmapsto f(x) - f\left(\sqrt{x^2}\right)$ est :

a. paire non impaire

b. impaire non paire

c. paire et impaire

d. ni paire ni impaire

33. $\displaystyle\int_0^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x =$

a. $\displaystyle -\int_0^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

b. $\displaystyle \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle -\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

34. $\displaystyle\int_{-2}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x =$

a. $\displaystyle \int_{-2}^{2} |f(-x)|\,\mathrm{d}x$

b. $\displaystyle 2\int_{0}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle 2\int_{-2}^{0} |f(x)|\,\mathrm{d}x$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives : A$(-2~;~0~;~-4)$, B$(0~;~-2~;~-4)$ et C$(0~;~a~;~0)$ où a est un réel

35. Une équation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& =3t+1\\ y &=& -3t-3\\ z &=& 0\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

b. $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& =2t-1\\ y &=& -2t-1\\ z &=& -4\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

c. $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& =t+2\\ y &=& t+4\\ z &=& -4\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

36. Une équation cartésienne du plan P, médiateur du segment $[AB]$ est :

a. $2x-2y+z=3$

b. $x+y=0$

c. $x=y$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

37. La longueur AB est égale à :

a. $2\sqrt{2}$

b. $4\sqrt{2}$

c. $6\sqrt{2}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

38. Le triangle ABC est rectangle en A lorsque $a =$

- **a.** 4
- **b.** 6
- **c.** 8
- **d.** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

39. L'intersection de la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{3}$ avec le plan P est :

- **a.** vide
- **b.** un point
- **c.** un cercle de rayon $\sqrt{5}$
- **d.** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

40. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y + 8z = -16$ est une équation cartésienne

- **a.** de la sphère de centre $(0\,;2\,;4)$ et de rayon 4
- **b.** de la sphère de centre $(0\,;\,-2\,;\,-4)$ et de rayon 4
- **c.** de la sphère de centre $(0\,;\,-2\,;\,-4)$ et de rayon 2
- **d.** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Soit l'équation différentielle : (E) : $3y' + 2y - 5 = 0$

41. La solution de (E) telle que $y(0) = \dfrac{1}{2}$ est définie par $y(x) =$

- **a.** $3\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} - \dfrac{5}{2}$
- **b.** $-2\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} + \dfrac{5}{2}$
- **c.** $-2\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} + \dfrac{5}{2}$
- **d.** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

42. La solution de (E) telle que $y'(0) = \dfrac{1}{2}$ est définie par $y(x) =$

- **a.** $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}$
- **b.** $\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}$
- **c.** $-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} + \dfrac{5}{2}$
- **d.** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

43. Si f est solution de (E) alors f' est solution de l'équation différentielle :

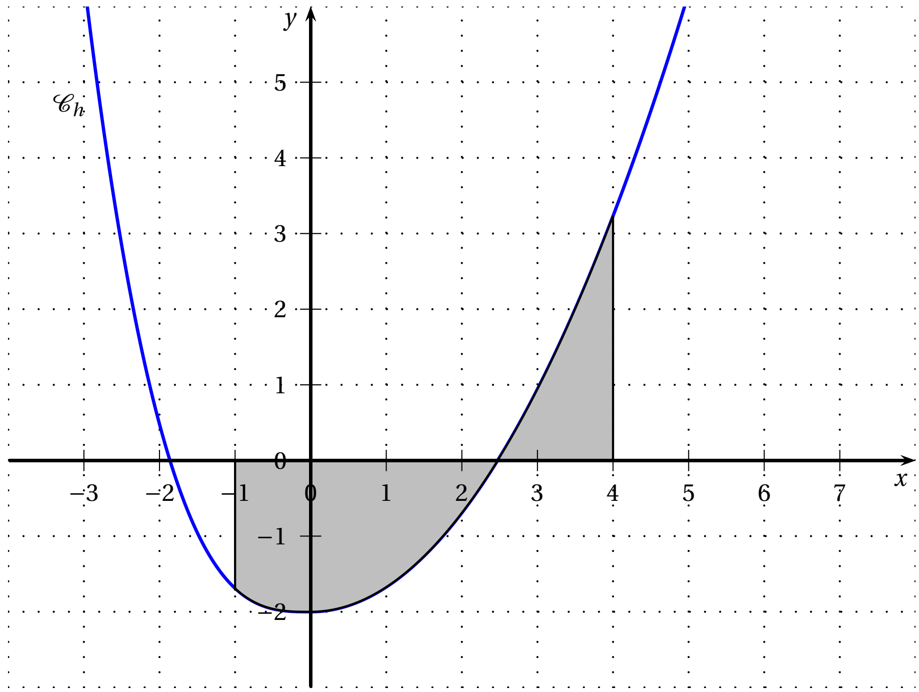
- **a.** $3y' + 2y = 0$
- **b.** $3y' - 2y = 0$
- **c.** $3y'' + 2y' - 5 = 0$
- **d.** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

44. Si une fonction f ne s'annulant pas, est solution de (E), alors $\dfrac{1}{f}$ est solution de l'équation différentielle :

- **a.** $\dfrac{3}{y'} + \dfrac{2}{y} - 5 = 0$
- **b.** $\dfrac{1}{3y'} + \dfrac{1}{2y} - \dfrac{1}{5} = 0$
- **c.** $\dfrac{3}{y'} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{1}{5} = 0$
- **d.** aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

ANALYSE DE COURBES

Ci-dessous la courbe représentative de la fonction h dans un repère orthonormal et $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en unités d'aire du domaine grisé :



45. a étant l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec l'axe des abscisses, A est égale à :

a. $\displaystyle\int_{-1}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_{-1}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle -\int_{-1}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$

d. $\displaystyle -\int_{-1}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$

46. $\displaystyle\int_{-1}^{4} h(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre :

a. -5 et -3

b. -3 et -1

c. -1 et 1

d. 1 et 3

47. $\displaystyle\int_{-1}^{4} |h(x)|\,\mathrm{d}x$ est comprise entre :

a. 0 et 1

b. 1 et 3

c. 3 et 5

d. 5 et 7

48. Sur $[0\,;4]$, la fonction $x \longmapsto \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ est :

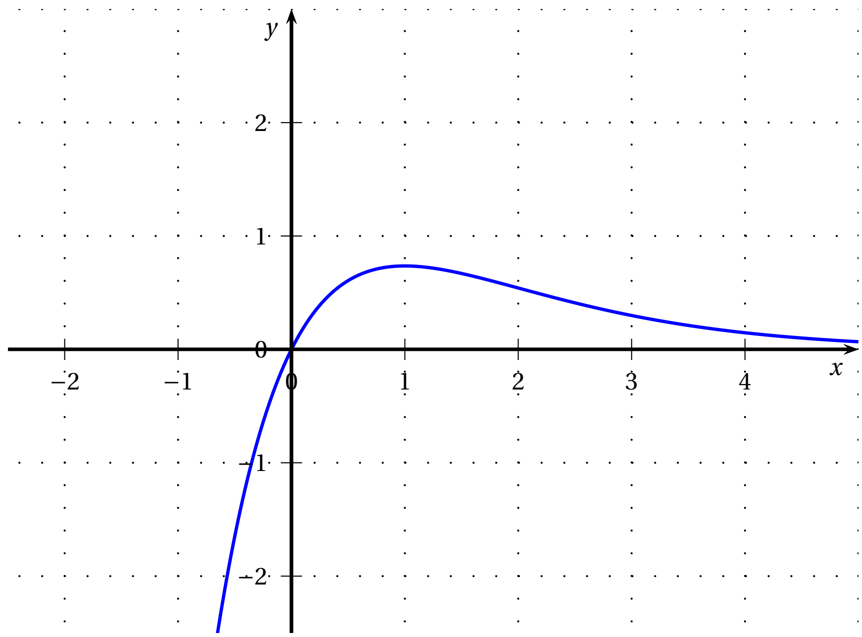
a. constante

b. croissante

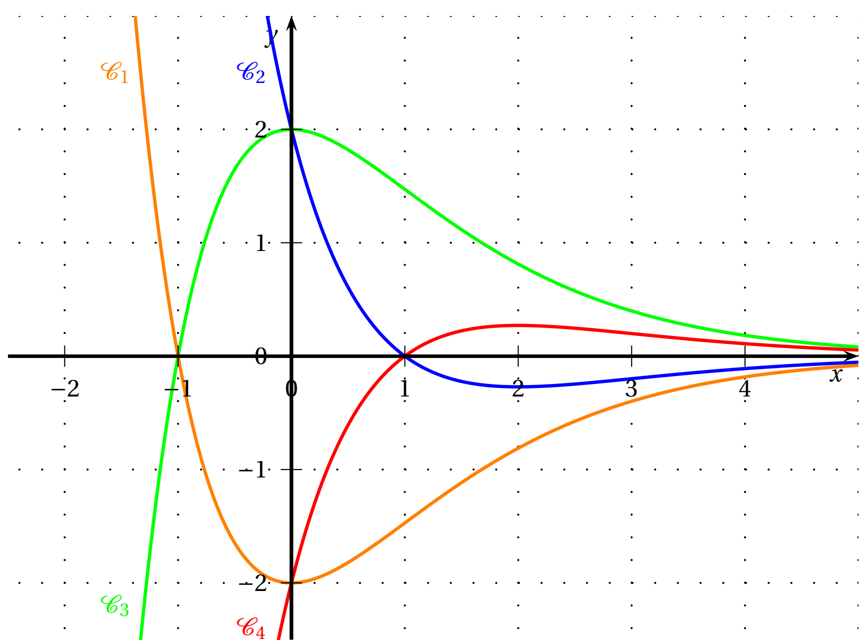
c. décroissante

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

Ci-dessous la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal



49. La courbe représentative de la fonction dérivée g' est :



a. $\mathscr{C}_1$

b. $\mathscr{C}_2$

c. $\mathscr{C}_3$

d. $\mathscr{C}_4$

50. La fonction $x \longmapsto g(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) =$

a. $x\mathrm{e}^{x}$

b. $-x\mathrm{e}^{x}$

c. $x\mathrm{e}^{-x}$

d. $-x\mathrm{e}^{-x}$

51. La fonction $x \longmapsto g'(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $g'(x) =$

a. $(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$

b. $(-x+1)\mathrm{e}^{-x}$

c. $(-x-1)\mathrm{e}^{x}$

d. $(-x+1)\mathrm{e}^{x}$

52. La primitive de g qui s'annule en 0 est définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) =$

a. $(-x-1)\mathrm{e}^{-x}+1$

b. $(-x+1)\mathrm{e}^{-x}-1$

c. $(-x-1)\mathrm{e}^{x}+1$

d. $(-x-1)\mathrm{e}^{-x}-1$

SUITES

(U_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}*$ par $U_n = 5 - \dfrac{10}{n}$,

(V_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}*$ par $V_n = 6 + \dfrac{3}{n}$,

et (W_n) une suite telle que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $U_n < W_n < V_n$.

53. Ainsi

a. (U_n) et (V_n) sont décroissantes

b. (U_n) et (V_n) sont croissantes

c. (U_n) est décroissante et (V_n) est croissante

d. (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante

54. La suite (W_n) est bornée par :

a. -7 et 11

b. -6 et 8

c. -4 et 9

d. 5 et 6

55. La suite (W_n) est forcément :

a. convergente

b. divergente vers $-\infty$ ou $+\infty$

c. divergente sans limite

d. Aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

56. Si (W_n) converge vers le réel ℓ alors ℓ appartient forcément à :

a. $]5~;~6[$

b. $]5~;~6]$

c. $[5~;~6[$

d. $[5~;~6]$

57. (W_n) peut alors être égale à :

a. $\dfrac{11\cos(n)}{2}$

b. $-\dfrac{11\cos(n)}{2}$

c. $\dfrac{11+\cos(n)}{2}$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

58. Soit (A_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $A_n = -3\times\left(\dfrac{-7}{5}\right)^n + 2\times\left(\dfrac{-7}{5}\right)^{n-1}$

La suite (A_n) est :

a. arithmétique non géométrique

b. géométrique non arithmétique

c. arithmétique et géométrique

d. ni arithmétique ni géométrique

59. La suite (A_n) :

a. converge vers 0

b. diverge vers $-\infty$

c. diverge vers $+\infty$

d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

60. La suite (A_n) est :

a. bornée

b. minorée non majorée

c. majorée non minorée

d. ni minorée ni majorée

FIN