

Exercice I

On a placé un jeton sur chaque sommet d'un polygone régulier à 1997 côtés. Sur chacun de ces jetons est inscrit un entier relatif, la somme de ces entiers relatifs étant égale à 1. On choisit un sommet de départ et on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique en ramassant les jetons au fur et à mesure tant que la somme des entiers inscrits sur les jetons ramassés est strictement positive. Peut-on choisir le sommet de départ de façon à ramasser tous les jetons ? Si oui, combien y-a-t-il de choix possibles ?

Exercice II

Une capsule spatiale a la forme du solide de révolution délimité par une sphère de centre O , de rayon R , et un cône de sommet O qui rencontre cette sphère selon un cercle de rayon r .

Quel est le volume maximal d'un cylindre droit contenu dans cette capsule, le cylindre et la capsule ayant même axe de révolution ?

Exercice III

C est un cube d'arête 1 et p est la projection orthogonale sur un plan. Quelle est la valeur maximale de l'aire de $p(C)$?

Exercice IV

Etant donné un triangle ABC , on note a, b, c les longueurs de ses côtés et m, n, p les longueurs de ses médianes.

Pour tout réel α strictement positif, on définit le réel $\lambda(\alpha)$ par la relation :

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = [\lambda(\alpha)] (m^\alpha + n^\alpha + p^\alpha)$$

1. Calculer $\lambda(2)$.
2. Calculer la limite de $\lambda(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.
3. A quelle condition portant sur a, b, c le réel $\lambda(\alpha)$ est-il indépendant de α ?

Exercice V

Dans le plan, soient A et B deux points distincts.

Pour tout point C extérieur à la droite (AB) , on note G l'isobarycentre du triangle ABC et I le centre de son cercle inscrit.

1. Soit α un réel tel que $0 < \alpha < \pi$.
Quel est l'ensemble Γ des points C tels que

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \right) = \alpha + 2k\pi.$$

k étant un entier ?

Lorsque C décrit Γ , montrer que G et I décrivent deux arcs de cercle que l'on précisera.

2. On suppose désormais que $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$. Comment doit-on choisir C dans Γ pour que la distance GI soit minimale ?
3. On note $f(\alpha)$ la distance minimale GI de la question précédente.
Expliciter $f(\alpha)$ en fonction de $a = AB$ et α .
Déterminer la valeur maximale de $f(\alpha)$ lorsque α décrit $\left] \frac{\pi}{3} ; \pi \right[$.