Journée de la régionale de Lyon

25 novembre 2023

Le processus de mathématisation de situations extra mathématiques dans l'enseignement primaire et secondaire.

Sonia Yvain-Prébiski - MCF Didactique des Mathématiques
S2HEP- INSPE Lyon-UCBL
sonia.yvain@univ-lyon1.fr

Introduction

Le processus de mathématisation

Des modalités de mise en œuvre au service du processus de mathématisation

Introduction

4

Le processus de mathématisation

12

Des modalités de mise en œuvre

31

Introduction

Développer les compétences des élèves à résoudre des problèmes ancrés dans le monde réel : un objectif internationalement partagé dans les différents curricula.

La modélisation mathématique en est une partie intégrante.

En France

La compétence **MODÉLISER** traverse les programmes de Mathématiques.

Cette compétence s'associe pleinement à la notion de culture mathématique décrite dans les rapports PISA.

> La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à raisonner de façon mathématique et à formuler, à employer et à interpréter les mathématiques pour résoudre des problèmes dans un éventail de contextes du monde réel. Elle nécessite notamment des concepts, des procédures, des faits et des outils pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. Elle aide les individus à connaître le rôle que les mathématiques jouent dans le monde et à se comporter en citoyennes et citoyens du XXIe siècle constructifs, engagés et réfléchis, c'est-à-dire à porter des jugements et à prendre des décisions en toute connaissance de cause.

PISA 2022: Mathematics Framework (oecd.org)

En France

Extrait du document d'accompagnement « Modéliser » cycle 4

La compétence « Modéliser », si on la prend dans son acception la plus large, renvoie pour le mathématicien au fait d'utiliser un ensemble de concepts, de méthodes, de théories mathématiques qui vont permettre de décrire, comprendre et prévoir l'évolution de phénomènes externes aux mathématiques. [...]
La compétence « Modéliser » est, parmi les compétences travaillées, celle qui aborde de front le lien des mathématiques avec un extérieur à la discipline. Définir précisément cet extérieur n'est pas chose aisée, car il n'est pas certain qu'on puisse simplement l'envisager ou le nommer sans disposer déjà d'un minimum de concepts, de théories, de modèles déjà plus ou moins liés aux mathématiques. Ceci étant, quel que soit le terme utilisé (monde naturel, monde empirique, réalité extérieure, monde réel, référence, contexte), la modélisation fait intervenir un élément non mathématique au début et à la fin du processus. On peut en effet
décrire de manière schématique le processus de modélisation en distinguant trois temps : la mise au point d'un modèle à partir du réel, le fonctionnement du modèle lui-même à l'intérieur des mathématiques, et la confrontation des résultats du modèle au réel. [...]
La modélisation, si on souhaite permettre aux élèves d'en comprendre les enjeux, nécessite dans l'idéal de partir d'un problème extra-mathématique, de construire un modèle, de le faire fonctionner et de pouvoir confronter ses résultats à la situation modélisée.

En France

Dans le guide sur la résolution de problèmes mathématiques au cours Moyen :
« *De nombreux chercheurs considèrent que les élèves ignorent trop souvent le monde réel lors de la résolution de problèmes. Il est donc utile de leur proposer, de temps en temps, des problèmes nécessitant un ancrage fort dans le monde réel* » (MEN 2022, p.48).

Modéliser (programme maths cycle 3, p.100)
- Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.

Dès l'école primaire, les enseignants sont invités à proposer des situations ancrées dans une certaine réalité, qui amènent les élèves à mettre en œuvre une démarche différente de celle rencontrée dans la résolution de problèmes intra-mathématiques.

Quels leviers ?

Quels compétences/apprentissages vise-t-on ?

Quelles situations proposer ?

Quels obstacles a priori ?

Quelles mises en œuvre ?

……….

Compétences associées à l'activité de modélisation mathématique

Compétences pour

- Mathématiser une situation extra-mathématique
- Créer un modèle mathématique à partir de la situation mathématisée
- Remettre en question la solution développée et recommencer
- Interpréter les résultats mathématiques

Compétences associées à l'activité de modélisation mathématique

Compétences pour

- Mathématiser une situation extra-mathématique
- Créer un modèle mathématique à partir de la situation mathématisée
- Interpréter les résultats mathématiques
- Remettre en question la solution développée et recommencer

Le processus de mathématisation

Situation de la vie quotidienne → Problème accessible à un traitement mathématique

Partir de situations ancrées dans le réel nécessite dans un premier temps de rendre le problème accessible par un traitement mathématique.

"Il faut prendre en compte le fait qu'une question de vie quotidienne est rarement directement une question mathématique. Elle le devient à travers un processus de mathématisation ou modélisation mathématique qui simplifie et interprète la réalité. Il est important de rendre visible cette étape, les choix qui y sont faits et la façon dont ils conditionnent l'appréhension du réel, en y associant activement les élèves." (Préface d'Artigue dans Masselin (2020, p. 13)).

Problème extra-mathématique → Problème accessible par un traitement mathématique

Mathématisation horizontale

Treffers (1978), Freudenthal (1991)- RME

- la mathématisation *horizontale* qui « *part du monde de la vie au monde des symboles* »

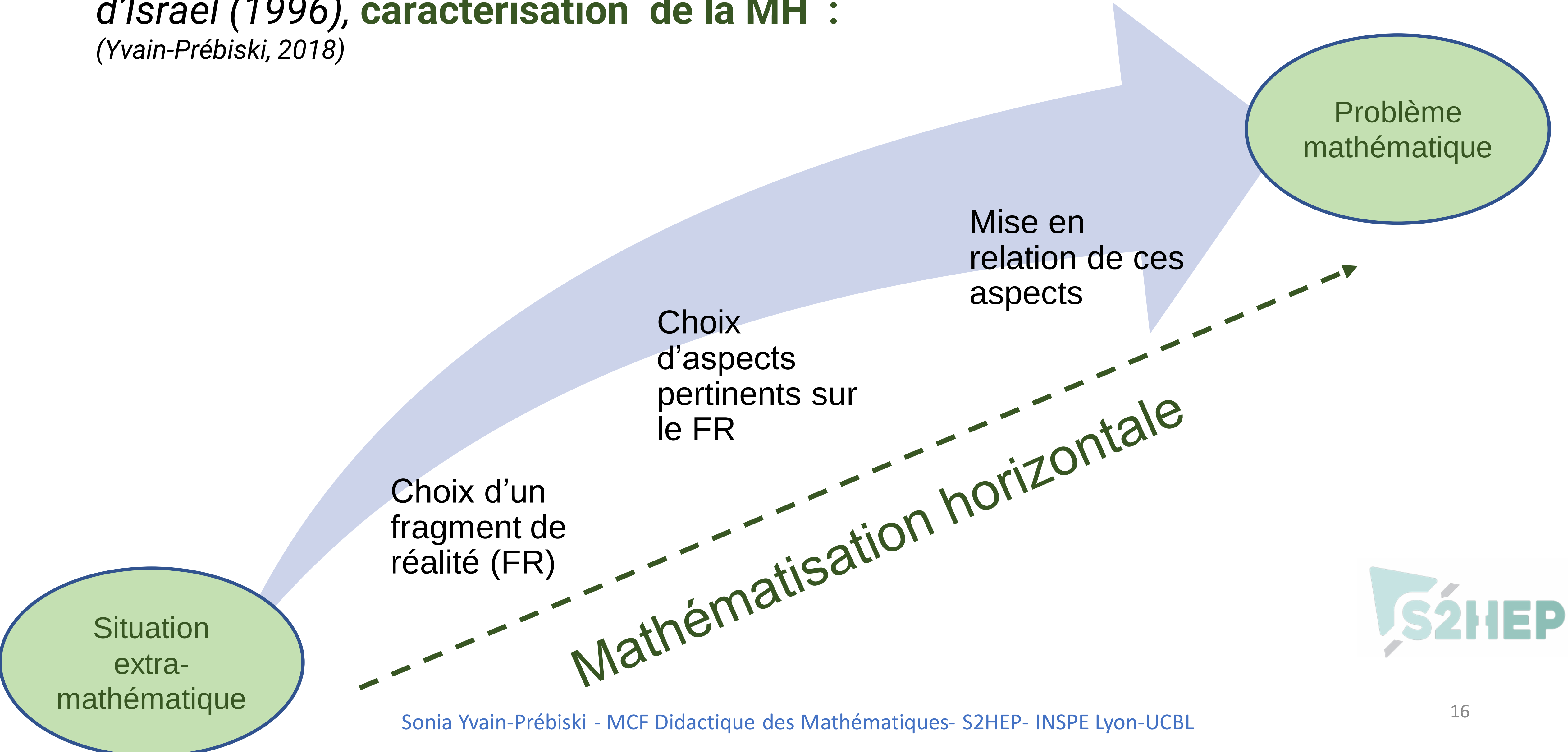
- la mathématisation *verticale* « *qui se déplace à l'intérieur de ce monde des symboles* »

Monde la vie → **MH** → Monde des symboles **MV**

MH ⟷ MV

Dans le cadre de la Realistic Mathematics Education et en appui sur les travaux d'Israël (1996), **caractérisation de la MH :**

(Yvain-Prébiski, 2018)



MH

- Choisir un fragment de réalité sur lequel on se questionne en vue de répondre à la question posée
- Identifier et choisir les aspects du fragment de réalité (éléments de contexte, grandeurs) susceptibles de relever d'un traitement mathématique
- Mettre en relation les aspects retenus en vue de la construction d'un modèle mathématique
- La quantification (Chabot & Roux, 2011) : manière dont certaines propriétés sont associées à des quantités. (associer une valeur numérique à un objet d'étude, lien avec la mesure)

MV

- La traduction mathématique de la mise en relation des aspects pertinents choisis
- Le traitement mathématique à partir de cette traduction

Prendre en compte la MH dans une activité de modélisation

Yvain-Prébiski, S. (**2023**). La mathématisation horizontale : quels apports pour une recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation mathématique. In Vandebrouck F. & Gardes, M.-L. (dir.) (2023). *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques - Preuve, Modélisation et Technologies Numériques*. Volume des séminaires et des posters. ARDM & IREM de Paris. p.209-218. http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/ACTESEE21.pdf

S’inscrire dans le cadre de l’OCDE 2022

Selon le cadre de l’OCDE 2022, il est important de former les élèves à :

« *translate from a real-world setting to the domain of mathematics and provide the realworld problem with mathematical structure, representations and specificity. They reason about and make sense of constraints and assumptions in the problem. ”* (OCDE 2022) *

« *simplifying a situation or problem in order to make it amenable to mathematical analysis* » **

*Ma traduction : *passer du monde réel au domaine des mathématiques et à donner au problème du monde réel une structure, des représentations et une spécificité mathématiques. Ils raisonnent sur les contraintes et les hypothèses du problème et leur donnent un sens*.
**Ma traduction : *simplifier une situation ou un problème afin de le rendre accessible à l'analyse mathématique*

Un levier pour certaines difficultés rencontrées lors de
La mise en œuvre de résolution de problèmes ancrés dans le réel

Deux exemples

Envisageons une non prise en compte de la MH comme constitutive de l'activité de modélisation

LES LIEUX D'ÉDUCATION ASSOCIÉS (LEA)

MaPcv : Mathématisation de Problèmes concrets à partir de vidéos

[Mathématisation de problèmes concrets en vidéos (MaPcv) — LéA (ens-lyon.fr)]

Envisageons une non prise en compte de la MH

Dans une même classe, extraits de verbatims

Morgane(élève) – c'est quasiment impossible parce **qu'on sait pas si va y avoir un problème avec la roue, elle peut s'arrêter aussi** ... on sait pas pourquoi ... parce qu'y a des problèmes ... et là ça prendrait plus de temps **donc ça peut pas se calculer la durée du temps vraiment**

Julia (élève) – moi je pense que **la seule solution pour trouver des réponses c'est d'y aller** et de nous dire quel temps elle fait le tour de la roue
César (élève) - faudrait aller à Lyon – maîtresse, moi, j'l'ai déjà fait cette grande roue à Lyon, du coup je sais qu'un tour c'était à peu près 1min30

M(L'enseignante) – nous n'irons pas à Lyon

Lisa (élève) - 1 tour dure 5 minutes
Samia : - faudrait qu'il nous montre dans quelle cabine elle est
César: – il pourrait faire une flèche rouge

- des choix à partir de considérations ancrées dans le réel
- des choix a priori

Mais l'enseignant.e vise un traitement mathématique !

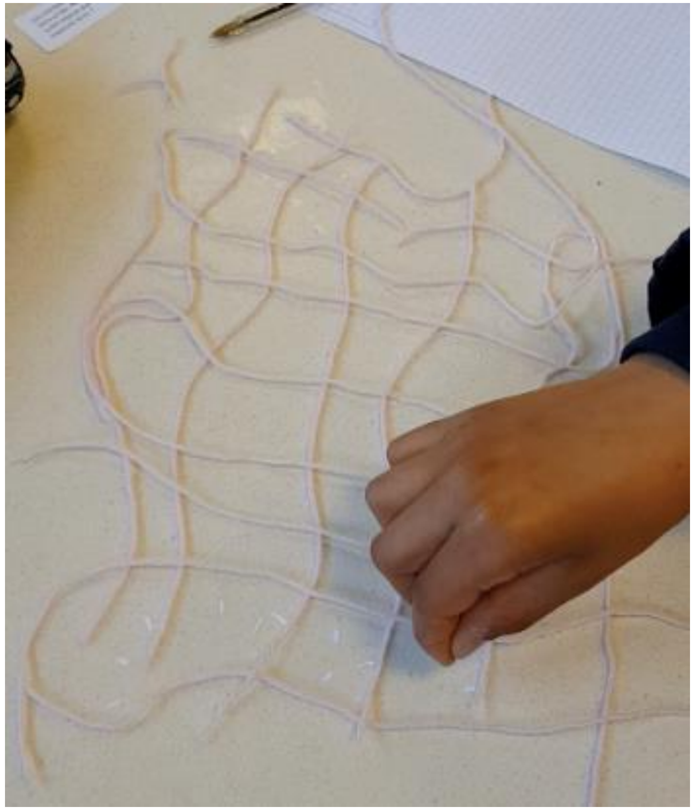
Yvain-Prébiski, S. & Discours, J**. (2023)**. La modélisation mathématique dans la résolution de problèmes concrets : un dispositif de formation adossé au rallye mathématique vidéo proposé par une circonscription. In *Actes 48ème Colloque de la COPIRELEM*-Toulouse 2022.

L’aire de baignade Les moniteurs d’une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac. Pour délimiter une aire de baignade, ils disposent d’une ligne d’eau de longueur 25 m. La loi impose que le nombre de baigneurs ne doit pas dépasser 3 personnes pour 2 m² .
Pourront-ils respecter la loi ?

Énoncé « Aire de baignade », Cahier de LS, Site de l’IREM de Rouen

Un collectif d’enseignants a choisi d'apporter de la laine pour que les élèves puissent matérialiser la " ligne d'eau " pour délimiter la zone de baignade .

Mais….



Un groupe d’élèves a découpé la laine pour représenter 40 zones carrées de 2m^2. Les élèves ont ensuite placé trois petits morceaux de papier dans chaque zone pour représenter trois nageurs

Fragment de réalité « ligne d’eau » vs fragment de réalité « aire de 2 m² »

L'enseignant expérimentateur : *L'élève du groupe a finalement mis la ligne d'eau au bord et il était derrière la ligne d'eau, je pensais que c'était la plage mécaniquement, mais ce n'était pas ça.*

L’observatrice du groupe d'élèves : *Au début, il a fait, ça ressemblait à une piscine, des couloirs et puis il l'a quadrillé comme un grillé à la pomme. Il a pris ensuite un petit morceau de papier pour dessiner un nageur et il a dit : " il faut que j'en mette trois là-dedans " en désignant chaque case.*

Yvain-Prébiski, S. & Masselin, B. (**2023**). La modélisation à partir d'une situation extra-mathématique : de la formation des enseignants à la mise en œuvre, dans le cadre du dispositif Lesson Study adapté au contexte français. Repères IREM 131.pp.51-73.

S’interroger sur des fragments de réalité …..mais difficile pour les élèves de s’autoriser à faire des choix

L'aire de baignade Les moniteurs d'une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac. Pour délimiter une aire de baignade, ils disposent d'une ligne d'eau de longueur 25 m. La loi impose que le nombre de baigneurs ne doit pas dépasser 3 personnes pour 2 m² . Pourront-ils respecter la loi ?

Fragments de réalité	Choix/hypothèses simplificatrices
Le lac	- Il est aussi grand que l'on veut. - On fixe sa forme. - On considère qu'il a un bord rectiligne (celui en contact avec la berge). - On considère qu'il a une anse semi-circulaire.
La ligne d'eau	- Elle est flexible. - On néglige la manière dont elle sera fixée. - On ne la dispose par le long de la délimitation du lac avec la berge. - On l'assimile à un matériau souple pouvant se courber (et non une succession d'entretoises rigides).
Le texte de loi	- On considère que les enfants vont se baigner tous en même temps. - On ne prend pas en compte comme personnes dans l'eau que les enfants (pas les moniteurs ou potentiellement d'autres personnes).
La zone de baignade	- On fixe sa forme. - Elle est fermée. - Considérer « aire de baignade » dans le texte comme zone de baignade. - On considère que les baigneurs se répartissent uniformément dans la zone de baignade.

Derouet, C. & Yvain-Prébiski, S. (**2023**). Vers la mathématisation de situations ancrées dans le réel : une proposition de grille d'analyse. Septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique - ETM7. 27 juin-2 juillet 2022, Strasbourg (France).pp.603-614

Selon le fragment de réalité considéré en première approche et les choix actés, le traitement mathématique qui relève de la mathématisation verticale peut être différent.

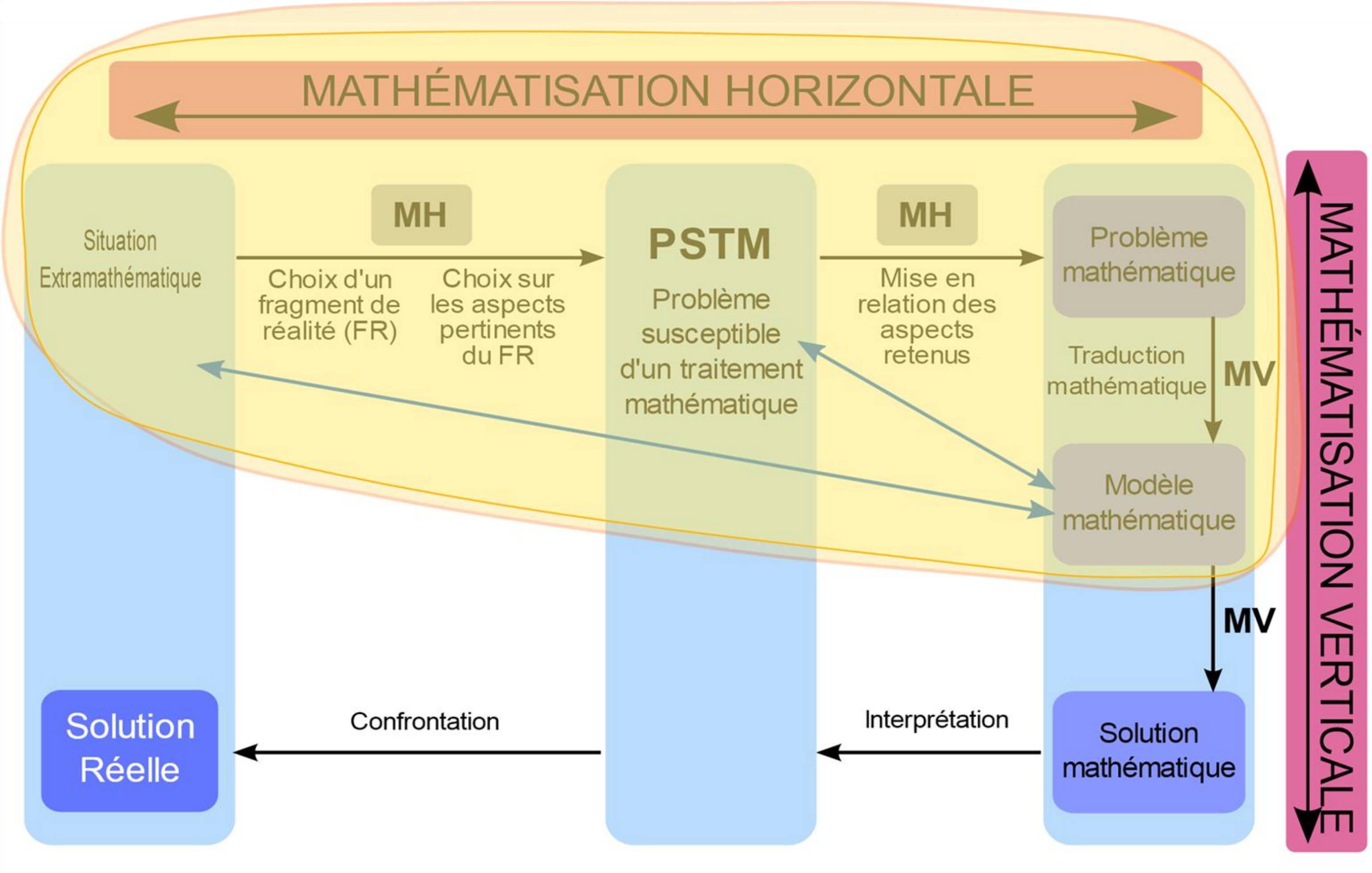
Problème 1 : Peut-on construire une zone de baignade semi-circulaire dont le demi-périmètre est de 25 m pour respecter le texte de loi (3 personnes pour 2 m²) sachant que 120 personnes se baignent en même temps ?

Choix associés : le lac est aussi grand que l'on veut et a un bord rectiligne avec la berge, la ligne d'eau est flexible, tous les enfants se baignent en même temps, le texte de loi ne concerne pas les adultes et la zone de baignade est semi-circulaire.

Problème 2 : Quelle forme donner à la zone baignade pour pouvoir respecter le texte de loi (3 personnes pour 2 m²) sachant que 120 personnes se baignent en même temps ?

Choix associés : le lac est aussi grand qu'on veut et a un de bord rectiligne avec la berge, la ligne d'eau est flexible, le texte de loi ne concerne pas les adultes et la zone de baignade est de forme libre.

Point de vigilance : ne pas laisser ces choix implicites



Yvain-Prébiski, S. (2021). Didactical adaptation of professional practice of modelling: a case study. In F.K.S. Leung, G.A. Stillman, G. Kaiser, K.L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. (pp. 305-319). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_26

La modélisation mathématique est une démarche de construction d'un modèle en langage mathématique permettant de mettre en relation les éléments choisis d'un fragment de réalité avec la question à étudier.

Prendre en compte la MH dans l'activité de modélisation permet de mieux identifier à quel niveau se situent les potentiels difficultés des élèves et d'en anticiper.

Yvain-Prébiski, S. & Chesnais, A. **(2019).** Horizontal mathematization: a potential lever to overcome obstacles to the teaching of modelling. In Jankvist, U. T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M. (Eds.), (2019). Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11, February 6 – 10, 2019) (pp. 1284- 1292). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group, Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Des modalités de mise en œuvre

Si l'objectif d'apprentissage est de développer des compétences liées à l'activité de modélisation

- Donner la possibilité aux élèves de se questionner pour amener les élèves à proposer des choix, des hypothèses simplificatrices

Le dispositif du léa MaPcv

LES LIEUX D'ÉDUCATION ASSOCIÉS (LEA)

Ne pas poser la question

- S’inscrit dans une certaine mesure dans le cadre du « *problem posing* »

*In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi** (Cantor, 1867, p.26)

* En mathématiques, l'art de poser une question a une valeur plus grande que celle de la résoudre.

“*process by which, on the basis of mathematical experience, students construct personal interpretations of concrete situations and formulate them as meaningful mathematical problems*.”(Stoyanova et Ellerton ,1996, p. 218)**

** processus par lequel, sur la base de l'expérience mathématique, les élèves construisent des interprétations personnelles de situations concrètes et les formulent comme des problèmes mathématiques significatifs.

« *By posing problems, students become the authors of their own problems and thus become actively involved in their own learning processes » (*Hartmann, L. M., Krawitz, J. & Schukajlow, S., 2021)***

***En posant des problèmes, les étudiants deviennent les auteurs de leurs propres pbs et s'impliquent ainsi activement dans leurs propres processus d'apprentissage.

Hartmann, L. M., Krawitz, J. & Schukajlow, S. Create your own problem! When given descriptions of real-world situations, do students pose and solve modelling problems?. ZDM Mathematics Education 53, 919–935 (2021).

Le dispositif du léa MaPcv

- Problème posé sous forme vidéo

Les caractéristiques de ce problème doivent permettre aux élèves de se questionner

- Les élèves se mettent ensuite d'accord sur le problème mathématique à résoudre

Dans les coulisses de la préparation du problème 2024

Contexte et problématique choisie

Comment un pizzaiolo fait-il pour savoir à quelle heure la commande demandée par un client sera prête ?

Prise en compte de la MH pour élaborer ce problème :
- Y a-t-il un pizzaiolo ? Ou sont-ils plusieurs ?
-Est-ce que toutes les pizzas ont le même temps de préparation ? le même temps de cuisson ?
- Nombre de pizzas sur le plan de travail ? Nombre de pizzas dans le four ?
- Est-ce le pizzaiolo qui répond aux appels pas ?
- Quel nombre de pizzas préparer en même temps ?
-Quel nombre de pizzas commandées par le client ?
- Quelles infos données dans la vidéo ? Quelles infos pourront être trouvées grâce à la vidéo (temps pour faire une pizza par exemple donner aux élèves la possibilité de chronométrer le temps d'une pizza)
- etc….

Dans les coulisses de la préparation du problème 2024

Tout en considérant le travail de MV

MH ↔ MV

Travail sur la gestion de données.
Proportionnalité (temps de préparation de pizzas).
Calculs de durées

Pour l'instant, on en est là : réflexion sur le script de la vidéo
A la fin de la préparation des 3 pizzas restantes, coup de fil : une équipe de rugby passe une grosse commande. On n'entend pas le message du client. Le pizzaiolo répond : « Je ne peux pas vous faire autant de pizzas pour 20H30 » ou « Ah, non, je ne peux pas faire autant de pizzas pour 20H30. Je n'ai pas cette capacité. » (Pourquoi ne pas couper la vidéo à ce moment-là ?)
L'heure de la commande est importante car il faut prendre en compte la commande en cours. (filmer l'horloge de la cuisine) Après son coup de fil, le pizzaiolo enfourne les 3 pizzas qui était en préparation.

IRES Institut de Recherche pour l'Enseignement des Sciences MONTPELLIER

Le dispositif ResCo de l'IRES de Montpellier

Des classes de la sixième à la terminale (enseignement général et professionnel) chaque année.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Nombre de classes participantes	74	60	52	63	128	97	81	81	91

Organisation de la session collaborative 2024 :

Dépôt des questions sur le blog de la classe sur la plateforme ResCo

Dépôt des réponses sur le blog des autres classes

Dépôt des recherches des élèves même partielles sur le blog de sa classe chaque semaine.

Découverte, lecture et analyse des travaux des autres classes sur la plateforme

Plus vous postez, plus les collaborations sont intéressantes !!!

1ère semaine du 15 au 19/01/24

2ème semaine du 22 au 26/01/24

3ème semaine du 29 au 02/02/24

4ème semaine du 05/02 au 09/02

5ème semaine du 12 au 16/02/24 ou du 26 au 1er/03 (pour la zone C)

Recherche et rédaction des questions

Rédaction des réponses aux questions des autres classes.

Analyse des réponses reçues Recherche du problème

Recherche de la fiction réaliste relancée

Synthèse des recherches

CLOTURE

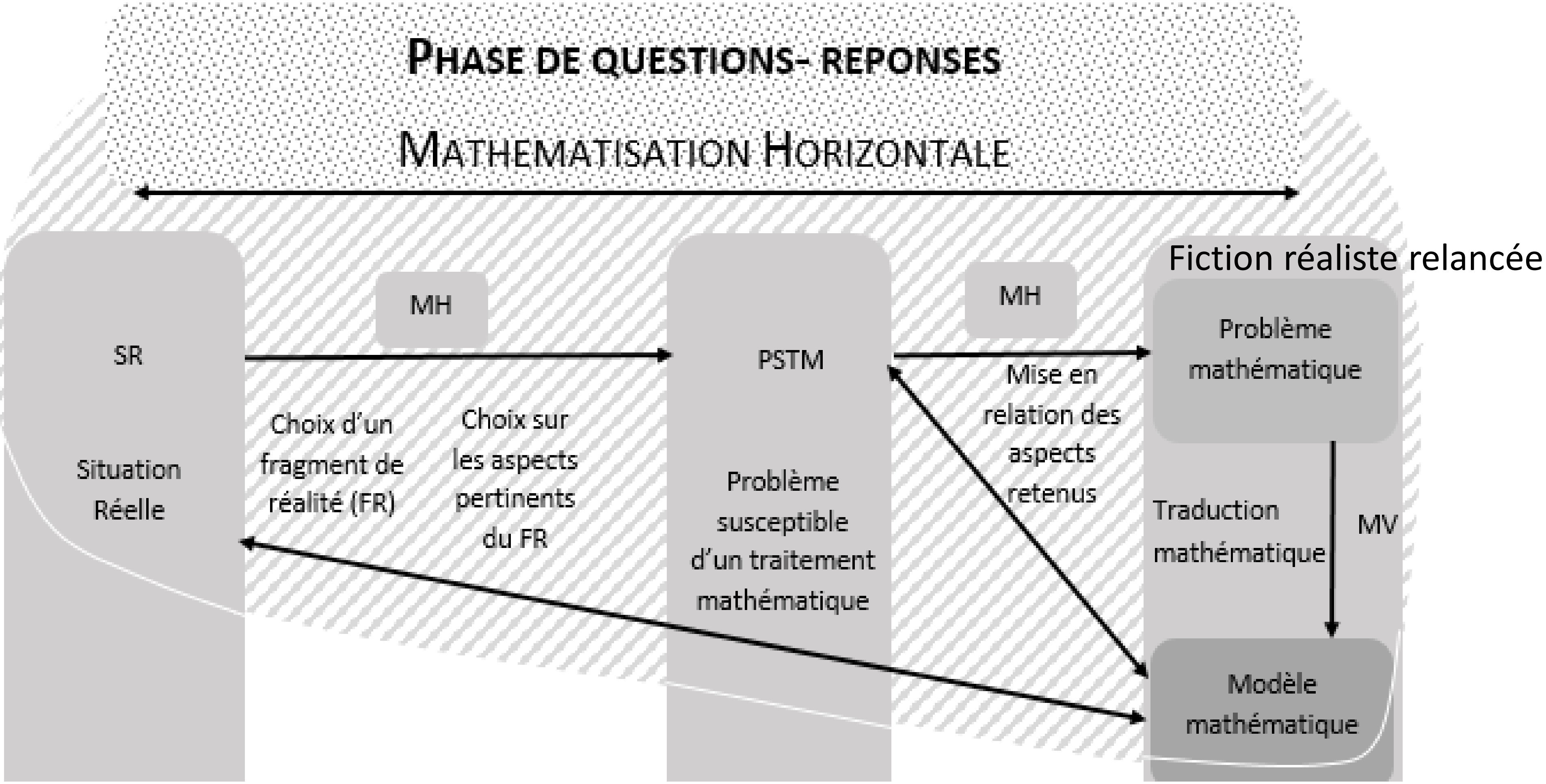
Envoi de la fiction réaliste par le groupe **ResCo**

Envoi de la fiction réaliste relancée par le groupe **ResCo**

Envoi de la clôture par le groupe **ResCo**

Eléments de solution(s), mathématiques travaillées, lien avec les programmes. Retour réflexif sur l'ensemble du dispositif. (Synthèse du groupe **ResCo**)

Contact : irem-resco@umontpellier.fr



Yvain, S. et Modeste, S. **(2018).** Faire entrer les élèves dans la mathématisation horizontale. Des fictions réalistes et un dispositif de résolution collaborative in *Proceedings of the CIEAEM 69 "Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)", n. 27, Supplemento n.2,* 2017 p.288-296

Dans les coulisses de la préparation du problème 2024

Une carte routière (à construire)
Problématique : optimiser la transformation des routes en ligne de trains en prévision de la fin du pétrole

MH ↔ MV

Donner
- le coût de la transformation d'un kilomètre de route en un kilomètre de voie ferrée selon plaine et montagne)
- le coût de l'aménagement d'un pont
- le budget des habitants
-………….;

Pour s'inscrire sur le forum : http://forum.math.univ-montp2.fr

Pour s'inscrire au dispositif 2024 : irem-resco@umontpellier.fr

Dans ces deux dispositifs

- Processus de mathématisation à prendre en compte

- des données manquantes (« missing data »), nécessité de faire des hypothèses

"As in real-life, modelling tasks contain information about the real world with superfuous or missing data. If information is missing, students need to make assumption" (Hartmann, L. M., Krawitz, J. & Schukajlow, S, 2021)

- **Les élèves doivent prendre compte les aspects non mathématiques de la situation pour donner du sens aux quantités et à leurs relations.**

- des prises de données instrumentées

Les compétences d'estimation de mesure sont importantes dans la vie quotidienne (Heinze et al., 2018).
L'estimation de mesure peut être utilisée pour déterminer des quantités manquantes par estimation, par exemple lors de la résolution de problèmes où des données manquantes doivent être déterminées par des estimations raisonnables.

Lien avec les problèmes dits de Fermi (Ärlebäck, 2009).

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. The Mathematics Enthusiast, 6(3), 331–364. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157

Heinze, A., Weiher, D. F., Huang, H.-M., & Ruwisch, S. (2018). Which estimation situations are relvant for a valid assessment of measurement estimation skills? In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.), Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 67–74). Umeå Mathematics Education Research Centre. http://www.igpme.net/wp-content/uploads/2019/05/PME42-2018- Umea.zip

Ateliers de cet après-midi

Proposition

Choix 1 (Pour ceux qui ne connaissent pas ResCo) : travail autour de la fiction réaliste 2023

Choix 2: travail autour du problème de la Grande Roue

Choix 3 : les deux précédents ☺

Atelier ResCo

https://padlet.com/syvain1473/atelier-resco-k78mh4w84eourdh5

Atelier MaPcv

https://padlet.com/syvain1473/atelier-mapcv-1ittmdnbky95xshe


Merci!