Baccalauréat STG Mercatique Polynésie 10 juin 2011 correction

La calculatrice (conforme à la circulaire N°99-186 du 16-11-99) est autorisée.

EXERCICE 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

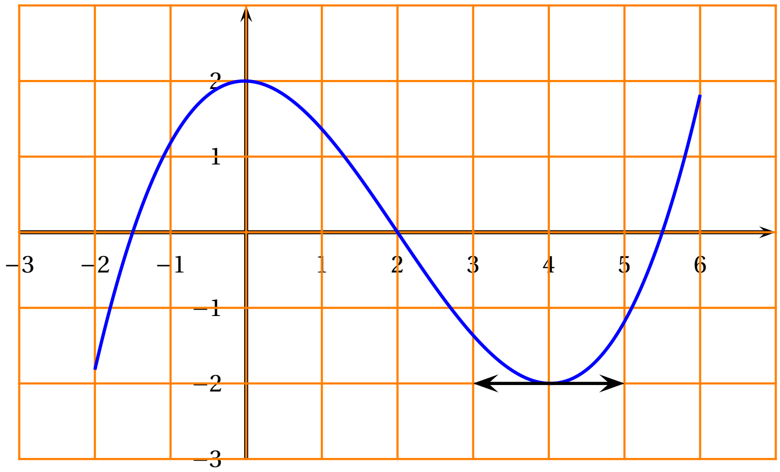
I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x\text{e}^x$. Sa dérivée f' est définie par :

a. $\cancel{f'(x) = 2\text{e}^x}$ **b.** $\cancel{f'(x) == 2 + \text{e}^x}$

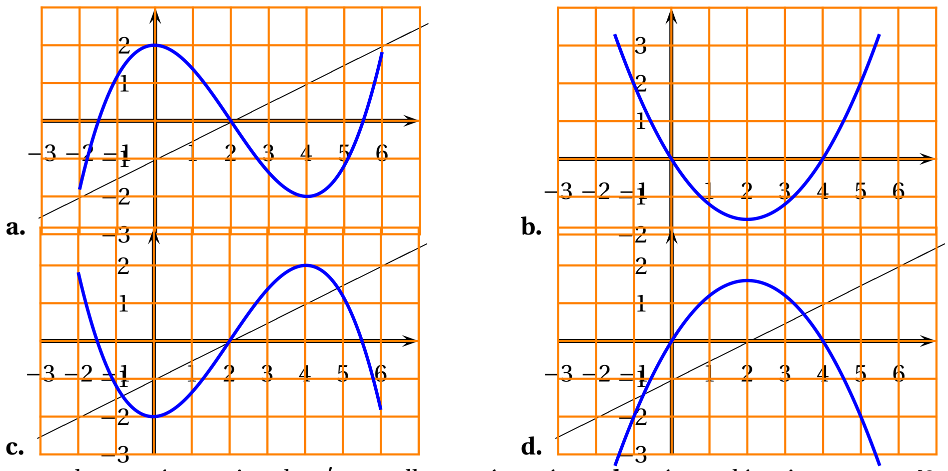
c. $\boxed{f'(x) = (2x+2)\text{e}^x}$ **d.** $\cancel{f'(x) = 2x\text{e}^x}$

f est de forme uv donc $f' = u'v + uv'$ $f'(x) = 2x\text{e}^x + 2x\text{e}^x = (2x+2)\text{e}^x$

II. La courbe ci-contre représente une fonction g définie sur l'intervalle $[-2\,;\,6]$.



1. La fonction g est dérivable sur $[-2\,;\,6]$ et on note g' sa fonction dérivée.
Parmi les quatre courbes données ci-dessous, indiquer laquelle représente g'.



La courbe représentative de g' est celle représentée en **b** g étant décroissante sur $[0\,;\,4]$ par conséquent $g' \leqslant 0$

2. Le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2\,;\,6]$ est :

a. $\cancel{0}$ **b.** $\cancel{1}$ **c.** $\cancel{2}$ **d.** $\boxed{3}$

La courbe représentative de g coupe l'axe des abscisses en trois points.

3. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 4 est :

a. $\cancel{y = x - 2}$ **b.** $\cancel{x = -2}$ **c.** $\boxed{y = -2}$ **d.** $\cancel{x = 2}$

la tangente au point d'abscisse 4 est parallèle à l'axe des abscisses donc l'équation est de la forme $y = k$.

EXERCICE 2 **5 points**

Un concessionnaire de voitures possède un parc de véhicules d'occasion et de véhicules neufs, de deux marques différentes : la marque A et la marque B.
En faisant le bilan de l'année passée, il constate que 20 % de ses ventes concernent des voitures neuves. Parmi ces voitures neuves vendues, 3 véhicules sur 10 sont de la marque A.
On tire au hasard une fiche client et on note :

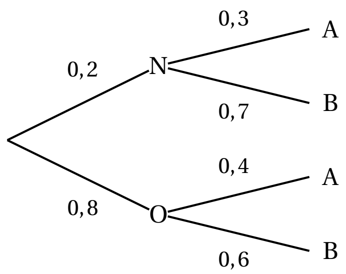
- N l'évènement : « la fiche est celle d'un client ayant acheté une voiture neuve »,
- O l'évènement : « la fiche est celle d'un client ayant acheté une voiture d'occasion »,
- A l'évènement : « la fiche est celle d'un client ayant acheté une voiture de marque A »,
- B l'évènement : « la fiche est celle d'un client ayant acheté une voiture de marque B ».

1. Donnons, à partir des informations de l'énoncé :

  a. La probabilité $p(\text{N})$ de l'évènement N, $p(\text{N}) = 0{,}2$ car 20 % de ses ventes concernent des voitures neuves

  b. La probabilité $p_{\text{N}}(\text{A})$ de l'évènement A sachant N. $p_{\text{N}}(\text{A}) = 0{,}3$ car 3 véhicules sur 10 sont de la marque A

2. Construisons l'arbre pondéré en indiquant les probabilités correspondant à chaque branche.



3. La probabilité $p(\text{O})$ de l'évènement O est $1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
La probabilité $p_{\text{N}}(\text{B})$ de l'évènement B sachant N est $1 - 0{,}3 = 0{,}7$

  a. La probabilité que la fiche concerne un client ayant acheté une voiture neuve de marque B est $p(\text{B} \cap \text{N}) = p(\text{B}) \times p_{\text{N}}(\text{B}) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$

  b. Le concessionnaire constate que 62 % des clients ont acheté une voiture de marque B, par conséquent $p(\text{B}) = 0{,}62$

  Démontrons que, la probabilité que la fiche concerne un client ayant acheté un véhicule d'occasion de marque B est : $p(\text{O} \cap \text{B}) = 0{,}48$.

  $p(\text{B}) = p(\text{N} \cap \text{B}) + p(\text{O} \cap \text{B})$ en remplaçant par leurs valeurs $0{,}62 = 0{,}14 + p(\text{O} \cap \text{B})$ d'où $p(\text{O} \cap \text{B}) = 0{,}62 - 0{,}14 = 0{,}48$. *Q.E.D.*

  c. La probabilité que le véhicule soit de la marque B sachant qu'il a été acheté d'occasion $p_{\text{O}}(\text{B}) = \dfrac{p(\text{O} \cap \text{B})}{p(\text{B})} = \dfrac{0{,}48}{0{,}8} = 0{,}6$

4. Les évènements B et O sont indépendants si $p(\text{B} \cap \text{O}) = p(\text{B}) \times p(\text{O})$
$p(\text{B} \cap \text{O}) = 0{,}48$ et $p(\text{B}) \times p(\text{O}) = 0{,}62 \times 0{,}8 = 0{,}496$.
Les évènements ne sont pas indépendants.

EXERCICE 3 **6 points**

On s'intéresse au tarif d'affranchissement postal en France depuis l'année 2002. Le tableau suivant donne l'évolution du prix du timbre-poste au cours de ces huit dernières années.

Année	2002	2003	2005	2006	2008	2009	2010
Prix du timbre (en euros)	0,46	0,50	0,53	0,54	0,55	0,56	0,58

Source : ARCEP (Autorité de régulation des communications électroniques et des postes)

Les prix demandés sont arrondis au centime. Les taux sont donnés en pourcentages arrondis à 0,1 %

1. Déterminons le taux d'évolution du prix du timbre entre 2002 et 2010 :

$$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} = \frac{0{,}58 - 0{,}46}{0{,}46} = \boxed{26{,}1\ \%}$$

2. Déterminons le taux moyen annuel d'évolution, exprimé en pourcentage, du prix du timbre entre 2002 et 2010. Durant cette période, le prix du timbre a subi 8 évolutions. Si t_m est le taux d'évolution, nous pouvons dire que le prix du timbre de 2002 à 2010 a été multiplié par $(1+t_m)^8$. Le taux moyen est alors : $t_m = 1{,}261^{\frac{1}{8}} - 1 = \boxed{2{,}9\ \%}$

3. L'ARCEP a décidé qu'entre 2009 et 2011 le taux d'évolution annuel moyen du prix du timbre-poste ne pourrait dépasser 2,3 %.

Si le prix du timbre augmente de 1 centime en 2011, la décision de l'ARCEP ne peut être respectée. En effet, calculons le coefficient multiplicateur pour passer de 0,56 à 0,59. Il vaut $\frac{0{,}59}{0{,}56} = 1{,}054$. Le taux moyen vaut alors après deux augmentations $1{,}054^{\frac{1}{2}} - 1 = 2{,}7\ \%$

Partie B

On désire réaliser une étude de l'évolution du prix du timbre, à l'aide d'une feuille de calcul, en partant d'un prix de 0,59 € en 2012 et en appliquant une augmentation annuelle de 2,3 % à partir de cette date.
On définit la suite (v_n) où v_n représente la valeur estimée, selon ce modèle, du prix du timbre l'année $(2012+n)$.
On a ainsi $v_0 = 0,59$ correspondant au prix du timbre en 2012.
On obtient la feuille de calcul suivante :
Les cellules de la plage B2 : B10 *sont au format nombre à deux décimales.*

	A	B	C
1	n	v_n	
2	0	0,59	
3	1	0,60	
4	2	0,62	
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		

1. La suite (v_n) est une suite géométrique car chaque terme sauf le premier, se déduit du précédent en le multipliant par 1,023. La raison de cette suite est 1,023.

2. La formule qui, écrite dans la cellule B3, permet d'obtenir, par recopie vers le bas, la plage de cellules B4 : B10 est $\boxed{\text{=B2*1,023}}$

3. En 2017 $n = 5$, le prix du timbre en 2017 serait $u_5 = 0{,}59 \times 1{,}023^5 \approx 0{,}66$

4. Selon ce modèle, le prix du timbre-poste dépasserait 75 centimes d'euro en 2023 car $u_{10} \approx 0{,}74$ et $u_{11} \approx 0{,}76$

EXERCICE 4 **5 points**

Un propriétaire de camping désire aménager son terrain avec des bungalows et des mobil-homes. La taille de son terrain lui impose un maximum de 50 installations. Il peut loger 6 personnes par bungalow et 4 personnes par mobil-home. L'infrastructure du camping ne l'autorise pas à dépasser le nombre de 240 clients par semaine.
On note x le nombre de bungalows et y le nombre de mobil-homes que le propriétaire désire installer.

1. Décrivons par un système d'inéquations les contraintes du problème.
– contrainte liée au nombre de clients :

un bungalow peut recevoir 6 personnes, x bungalows $6x$ personnes

un mobil-home peut recevoir 4 personnes, y mobil-homes $4y$ personnes

le maximun étant de 240 personnes, s'il installe x bungalows et y mobil-homes on a l'inégalité

$$6x+4y \leqslant 240 \qquad (1)$$

– contrainte liée au nombre d'installations, il ne peut y avoir plus de 50 bungalows ou mobil-homes. S'il accorde les emplacements à x bungalows et à y mobil-homes on a l'inégalité

$$x+y \leqslant 50 \qquad (2)$$

– contraintes implicites : les nombres x et y doivent être des nombres entiers.

$$x \geqslant 0 \qquad (3)$$
$$y \geqslant 0 \qquad (4)$$

2. Justifions que le système demandé est équivalent au système (S) suivant :

$$(\text{S}) \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & \geqslant & 0\\ y & \geqslant & 0\\ y & \leqslant & -x+50\\ y & \leqslant & -1,5x+60 \end{array}\right. \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des nombres entiers.}$$

l'inéquation (1) peut aussi s'écrire $4y \leqslant -6x+240$ ou aussi $y \leqslant -\frac{3}{2}x+60$ ce qui correspond à la quatrième inéquation du système (S).

l'inéquation (2) peut aussi s'écrire $y \leqslant -x+50$ ce qui correspond à la troisième inéquation du système (S).

Les inéquations (3) et (4) sont les deux premières inéquations du système.

Sur le graphique donné en **annexe**, on a tracé dans un repère orthogonal, les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = -x+50$ et $y = -1,5x+60$.

Déterminons graphiquement, en hachurant la partie du plan qui ne convient pas, l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient le système (S). L'origine du repère apppartient à tous les demi-plans solutions. L'ensemble solution du système (S) est l'ensemble des points M à coordonnées entières appartenant au polygone, partie du plan non hachurée incluse dans le premier quadrant, frontières incluses.

3. Le propriétaire peut installer sur son terrain et louer :

a. 10 bungalows et 35 mobil-homes. Oui, cela corrrespond au point A sur le graphique et il appartient à l'ensemble solution.

b. 30 bungalows et 20 mobil-homes. Non, cela corrrespond au point B sur le graphique et il n'appartient pas à l'ensemble solution.

4. Un bungalow se loue 500 € la semaine et un mobil–home 400 € la semaine. Soit R le revenu hebdomadaire que recevra le propriétaire.

a. Exprimons R en fonction de x et y. La location de x bungalows lui apportent $500x$ euros, celle des y mobil–homes lui apporte $400y$ euros, d'où $\text{R} = 500x+400y$.

b. Une équation de la droite (d) correspondant à un revenu hebdomadaire de 12 000 €, est $12\,000 = 500x + 400y$, en simplifiant $4y = -5x + 120$.
L'équation réduite de (d) est $y = -\frac{5}{4}x + 30$. (d) est tracée sur le graphique.

c. Toutes les droites de recette sont parallèles à la droite (d) (même coefficient directeur). On cherche parmi celles-ci, celle qui aura une ordonnée à l'origine la plus grande possible et dont l'intersection avec le polygone solution est non vide. En traçant des parallèles, on trouve le point marqué par un astérisque. Ses coordonnées sont (20 ; 30). C'est le point d'intersection de (d_1) et de (d_2). Les contraintes sont maximales.

d. Le propriétaire pour obtenir le revenu maximum doit acquérir 20 bungalows et 30 mobil-homes. Son revenu sera alors de $500 \times 20 + 400 \times 30$ soit 22 000 euros.

ANNEXE

À rendre avec la copie

Exercice 4