Corrigé du brevet des collèges Métropole, 28 juin 2011

Activités numériques 12 points

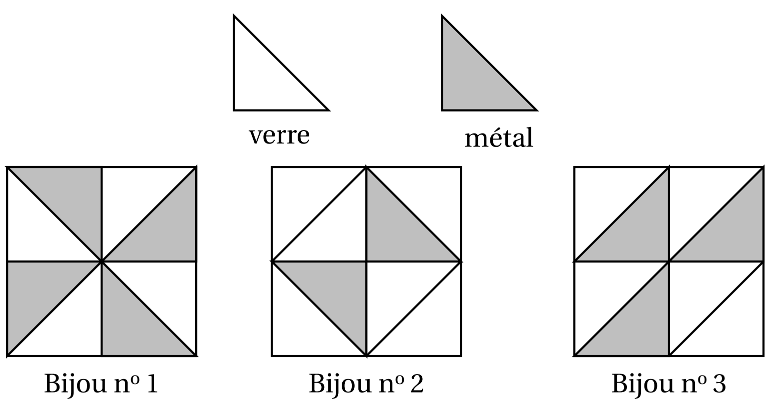
Exercice 1

Un dé cubique a 6 faces peintes : une en bleu, une en rouge, une en jaune, une en vert et deux en noir.

1. On jette ce dé cent fois et on note à chaque fois la couleur de la face obtenue. Le schéma ci-contre donne la répartition des couleurs obtenues lors de ces cent lancers.
   a. Fréquence d'apparition de la couleur jaune : $\dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$;
   b. Fréquence d'apparition de la couleur noire : $\dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{10}$.
2. On suppose que le dé est équilibré.
   a. Probabilité d'obtenir la couleur jaune : $\dfrac{1}{6}$;
   b. Probabilité d'obtenir la couleur noire : $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
3. L'écart entre les fréquences obtenues à la question 1 et les probabilités trouvées à la question 2 s'explique de la manière suivante : le nombre de lancers n'est pas assez grand pour pouvoir faire que les fréquences soient assez proches des probabilités théoriques.

Exercice 2

Trois exemples de bijoux sont donnés ci-dessous. Les triangles en verre sont représentés en blanc ; ceux en métal sont représentés en gris.



Tous les triangles en métal ont le même prix. Tous les triangles en verre ont le même prix.
Le bijou n° 1 revient à 11 € ; le bijou n° 2 revient à 9,10 €.
Le prix de revient du bijou n° 3 est de 10,05€ ; en effet :
Soit x le prix d'un triangle en verre ;

soit y le prix d'un triangle en métal.
x et y sont deux nombres réels positifs.
Nous avons donc :

$$\left\{\begin{array}{l} 4x+4y=11\\ 6x+2y=9,10\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 4x+4y=11\\ 12x+4y=18,20\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 4x+4y=11\\ 8x=7,20\ (l_2-l_1)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0,90\\ y=\frac{11-4\times 0,90}{4}=1,85\end{array}\right.$$

Ainsi, le prix de revient du bijou n° 3 est de : $5\times 0,90+3\times 1,85=10,05$ (€)

Exercice 3

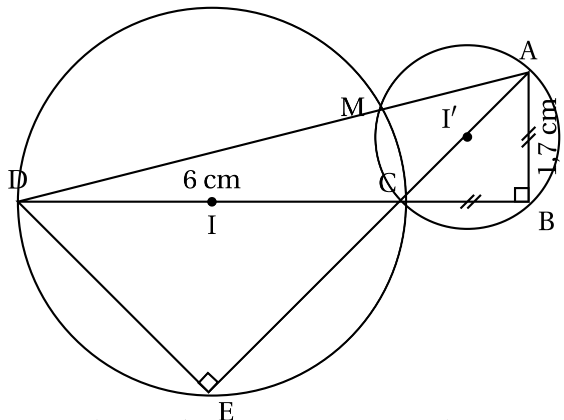
1. Deux affirmations sont données ci-dessous.
   Affirmation 1 Fausse
   Pour tout nombre a non nul : $(2a+3)^2=(2a)^2+2\times 2a\times 3+3^2=4a^2+12a+9\neq 4a^2+9$.
   Affirmation 2 Fausse
   Augmenter un prix de 20 % revient à le multiplier par 1,2.
   Effectuer une remise de 20 % sur ce nouveau prix revient à multiplier par 0,8.
   Ainsi le prix initial est multiplié par $1,2\times 0,8=0,96$. Cela ne redonne pas le prix initial !
2. Deux égalités sont données ci-dessous.
   Égalité 1 : Vraie
   $$\frac{\sqrt{32}}{2}=\frac{\sqrt{16\times 2}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$
   Égalité 2 : Fausse
   $$10^5+10^{-5}\neq 10^0;\ \text{mais } 10^5\times 10^{-5}=10^{5-5}=10^0=1$$

Activités géométriques 12 points

Exercice 1

Le dessin ci-dessous représente une figure géométrique dans laquelle on sait que :

- ABC est un triangle rectangle en B.
- CED est un triangle rectangle en E.
- Les points A, C et E sont alignés.
- Les points D, C et B sont alignés.
- AB = CB = 2 cm.
- CD = 6 cm.



Le dessin n'est pas en vraie grandeur

1. **a.** Mesure de l'angle $\widehat{ACB}$: 45°. En effet, le triangle ACB est un triangle rectangle isocèle, les deux angles à la base sont donc égaux et leur mesure est donc : $\dfrac{180-90}{2} = 45$.

   b. Mesure de l'angle $\widehat{DCE}$: 45°. Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DCE}$ sont opposés par leurs sommets.

2. Valeur approchée de DE à 0,1 cm près :

$$\sin 45 = \frac{x}{6} \Longleftrightarrow x = 6 \times \sin 45 = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \simeq 4,2$$

3. Le triangle DCE est rectangle en E. Le centre I du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle DCE est le milieu de l'hypoténuse [DC]. De même, le centre I′ du cercle circonscrit $\mathscr{C}'$ au triangle ABC est le milieu de l'hypoténuse [AC].

4. Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent en deux points : le point C et un autre point noté M. Les points D, A et M sont alignés. En effet :
   Le point M se trouvant sur le cercle $\mathscr{C}$, le triangle MDC est rectangle en M ;
   Le point M se trouvant sur le cercle $\mathscr{C}'$, le triangle MCA est rectangle en M ;
   ainsi l'angle $\widehat{DMA}$ est un angle plat.

Exercice 2

1. Dessin d'un pavé droit en perspective cavalière :

2. Un aquarium a la forme d'un pavé droit de longueur 40 cm, de largeur 20 cm et de hauteur 30 cm.

   a. Volume V, en cm^3, de ce pavé droit :

$$V = 40 \times 20 \times 30 = 24\,000 \text{ cm}^3 \text{ soit } 24 \text{ l}$$

3. Le volume, en cm^3, d'une boule de rayon r est $\dfrac{4}{3}\pi r^3$. Ici $r = 15$.

   Donc la bonne formule est : $\dfrac{4}{3} \times \pi \times 15^3$.

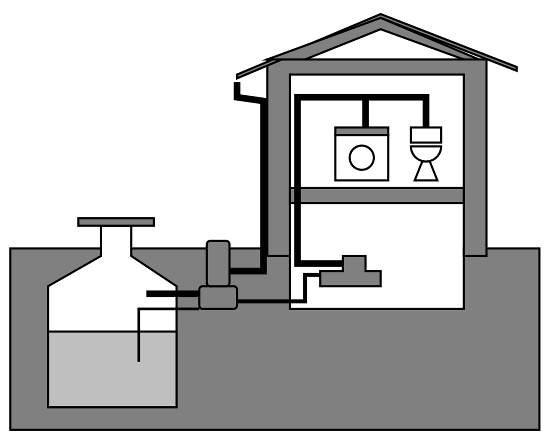
4. Un second aquarium contient un volume d'eau égal aux trois quarts du volume d'une boule de diamètre 30 cm, c'est-à-dire $V' = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{3} \times \pi \times 15^3 = \pi \times 15^3 \approx 10\,602{,}875\text{cm}^3$.

   On verse son contenu dans le premier aquarium. Soit la hauteur h de l'eau dans le premier aquarium. On a donc :

   $40 \times 20 \times h \approx 10602,875 \iff h \approx \dfrac{10\,602{,}875}{800} \approx 13,25 \text{ cm} \approx 133 \text{ mm}$

Problème 12 points

Une famille envisage d'installer une citerne de récupération d'eau de pluie. Pour pouvoir choisir une installation efficace, la famille commence par déterminer sa capacité à récupérer de l'eau de pluie. Elle estime ensuite ses besoins en eau avant de choisir une citerne.



Partie 1 - La capacité à recueillir de l'eau de pluie

1. Dans cette partie il s'agit de calculer le volume d'eau de pluie que cette famille peut espérer recueillir chaque année. Dans la ville où réside cette famille, on a effectué pendant onze années un relevé des précipitations. Ces relevés sont donnés dans le tableau suivant.

Années	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Précipitations en litres par mètre carré (l/m^2	1 087	990	868	850	690	616	512	873	810	841	867

a. C'est en 1999 qu'il y a eu le plus de précipitations.

b. En 2009, il est tombé 867 l/m^2, soit $867 \times 5 = 4\,335$ l pour 5 m^2.

2. Sur les onze années présentées dans le tableau, la quantité moyenne d'eau tombée en une année par m^2 est :

$$\overline{m} = \frac{1087 + 990 + 868 + 850 + 690 + 616 + 512 + 873 + 810 + 841 + 867}{11} \simeq 818,55$$

3. Surface au sol d'une maison ayant la forme d'un pavé droit (surmonté d'un toit) de 13,9 m de long, 10 m de large et 6 m de haut : $13,9 \times 10 = 139$ (m^2).

4. Une partie de l'eau de pluie tombée sur le toit ne peut pas être récupérée. La famille utilise une formule pour calculer le volume d'eau qu'elle peut récupérer :
$V = P \times S \times\ 0,9$

V : volume d'eau captée en litre,
P : précipitations en litre par mètre carré,
S : surface au sol en mètre carré.
Volume récupéré en litres pour l'année 2009 :

$$V = 867 \times 139 \times 0,9 = 108461,7 \text{ (l)}.$$

Soit 108 m^3 à 1 m^3 près par défaut.

Partie II - Les besoins en eau

La famille est composée de quatre personnes.
La consommation moyenne d'eau par personne et par jour est estimée à 115 litres.

1. Chaque jour, l'eau utilisée pour les WC est en moyenne de 41 litres par personne.

Le pourcentage w que cela représente par rapport à la consommation moyenne en eau par jour d'une personne est :

$$41 = \frac{w}{100}115 \iff w = \frac{41}{115} \times 100 \simeq 35,65\%$$

2. On estime que 60 % de l'eau consommée peut être remplacée par de l'eau de pluie, c'est-à-dire : $\frac{60}{100}115 = 69$ (l) par jour et par personne, soit $69 \times 4 = 276$ litres par jour pour la famille.

Les besoins en eau de pluie de toute la famille pour une année de 365 jours sont d'environ 100 m^3 :

$$276 \times 365 = 100\,740 \text{ (l)} = 100,740 \text{ (m}^3\text{)}$$

3. L'eau de pluie récupérée en 2009 (108 m^3) n'aurait pas pu suffire aux besoins en eau de pluie de la famille.

Partie III - Le coût de l'eau

1. Le graphique donné en **ANNEXE**, représente le coût de l'eau en fonction de la quantité consommée.

a. En utilisant ce graphique, une valeur approchée du prix payé pour 100 m^3 d'eau est : 250€.

b. On note $p(x)$ le prix en euros de la consommation pour x mètres cube d'eau. La représentation graphique de la fonction p est une droite passant par l'origine, p est donc une fonction linéaire $(y = ax)$. Elle passe par le point $(20;50)$, donc : $50 = 20 \times a \iff a = 2,5$.

Ainsi : $p(x) = 2,5x$.

c. Au prix de la consommation vient s'ajouter le prix de l'abonnement. L'abonnement est de 50 euros par an.

Représentation de la fonction donnant le prix en euros, abonnement inclus, en fonction du volume d'eau consommé en mètres cube (en bleu sur le graphique).

2. La famille espère économiser 250 euros par an grâce à la récupération de l'eau de pluie. Elle achète une citerne 910 euros. Au bout de 4 d'années les économies réalisées pourront compenser l'achat de la citerne :

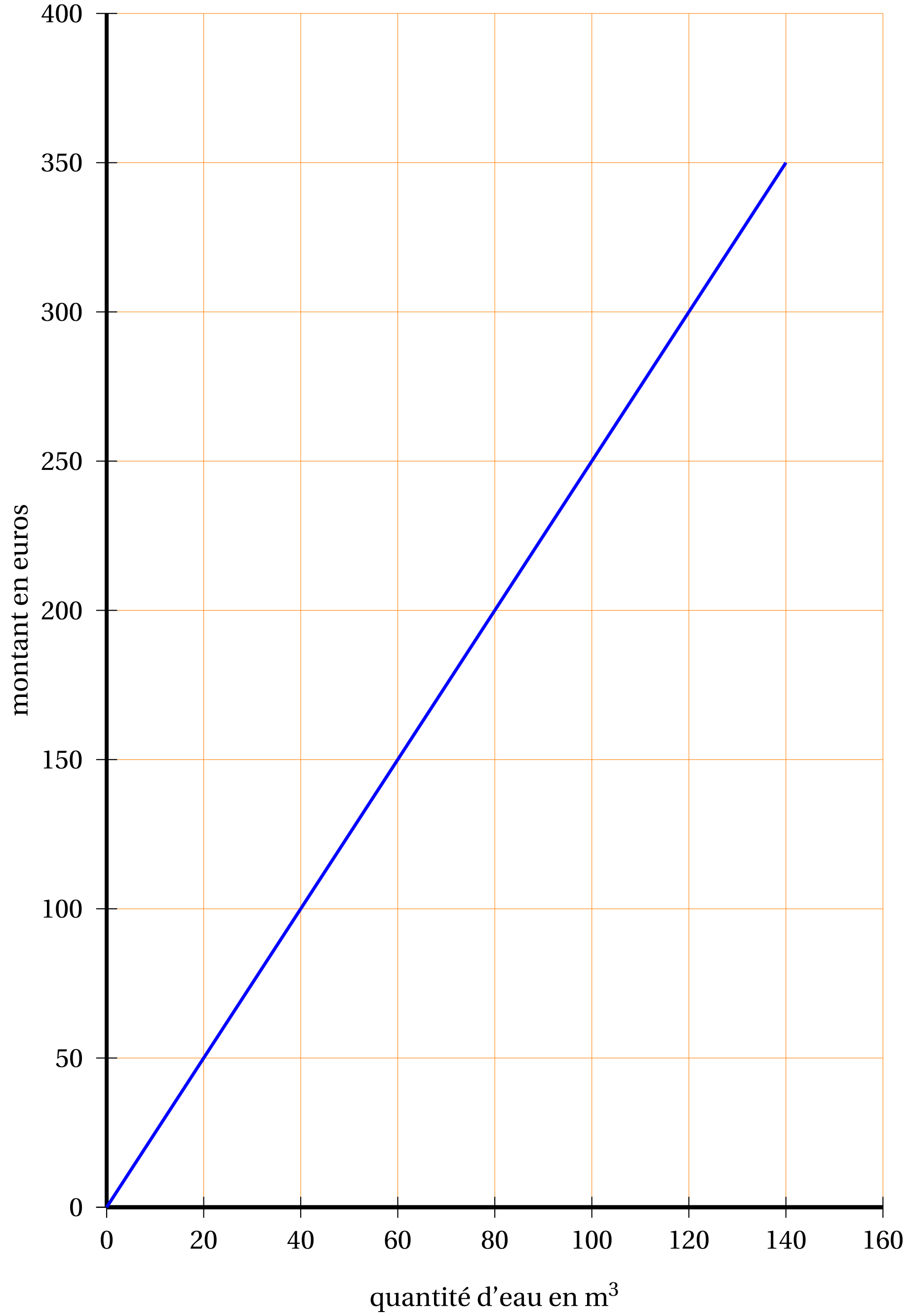
$$\frac{910}{250} = 3,64$$

ANNEXE

à rendre avec la copie

Problème

Coût de l'eau


400
350
300
250
200
150
100
50
0
montant en euros
0
20
40
60
80
100
120
140
160
quantité d'eau en m³