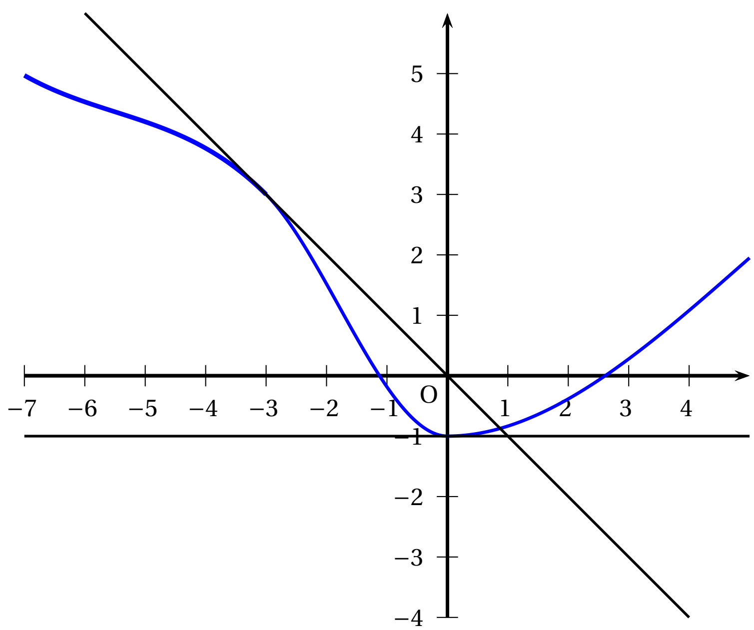
Corrigé du baccalauréat ES/L Liban
31 mai 2016

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



Par lecture graphique du coefficient directeur des tangentes, on obtient $f'(0) = 0$ car la tangente est horizontale et $f'(-3) = -1$.

La bonne réponse est donc **la réponse c**.

2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = (x+1)\ln(x)$.

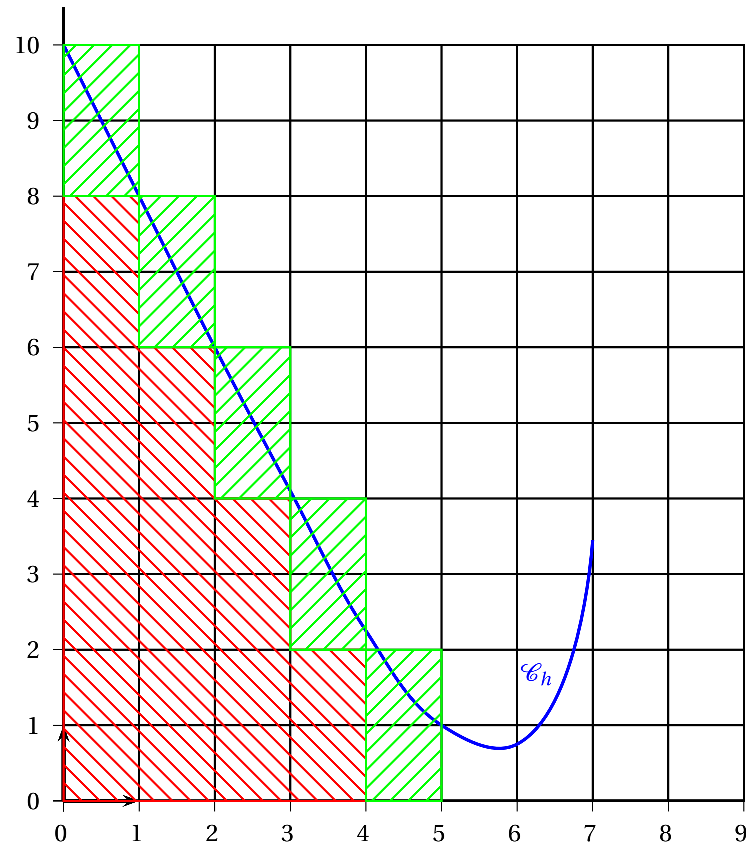
La fonction g est un produit de fonctions dérivables, on pose $u(x) = x+1$ et $v(x) = \ln x$ d'où $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Par suite, on aura :

$g'(x) = 1 \times \ln x + (x+1) \times \dfrac{1}{x} = \ln x + \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x} + \ln x = 1 + \dfrac{1}{x} + \ln x.$

La bonne réponse est **la réponse d**.

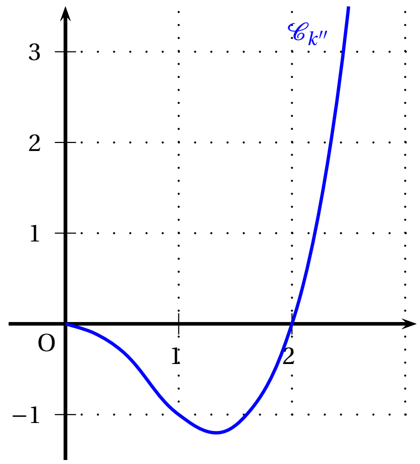
3. On considère la fonction h définie sur $[0\,;7]$ et représentée par la courbe ci-dessous :



La fonction h étant positive sur $[0\,;5]$, l'intégrale représente l'aire située entre la courbe $\mathscr{C}_h$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 5$.

En encadrant cette aire par un nombre entier de « carreaux », soit la zone hachurée en rouge et la zone hachurée en rouge et vert, on obtient $20 < \displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x < 30$ soit **la réponse b**.

4. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0\,;\,+\infty[$.



Par lecture graphique, $k''(x) \leqslant 0$ sur $[0 ; 2]$.

Si la dérivée seconde est négative, la fonction est concave; la fonction k sera donc concave sur $[0 ; 2]$ et donc sur $[1 ; 2]$ soit **la réponse a**.

Exercice 2 **5 points**

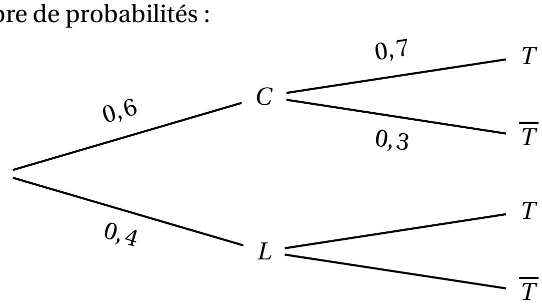
Commun à tous les candidats

Partie A

Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens.
Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un.
On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux évènements suivants :

— C : « le jeune choisi est un collégien »;
— L : « le jeune choisi est un lycéen »;
— T : « le jeune choisi possède un téléphone portable ».

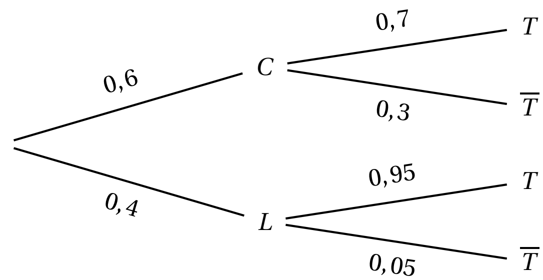
1. D'après les données du texte, $p(C) = 0,6$, $p(L) = 0,4$, $p(T) = 0,8$ et $p_C(T) = 0,7$.
2. Soit sous forme d'un arbre de probabilités :



3. On cherche $p(C \cap T) = p(C) \times p_C(T) = 0,6 \times 0,7 = 0.42$
4. On cherche $p_T(C) = \dfrac{p(C \cap T)}{p(C)} = \dfrac{0,42}{0,8} = 0{,}525$

5. **a.** En utilisant les probabilités totales, on a $p(T) = p(C \cap T) + p(L \cap T) = 0.8$ donc
$p(T \cap L) = p(T) - p(C \cap T) = 0,8 - 0,42 = 0,38$ et par suite,
$p_L(T) = \dfrac{p(L \cap T)}{p(L)} = \dfrac{0,38}{0,4} = 0,95$.

b. On peut donc compléter l'arbre construit dans la question 2.



Partie B

En 2012 en France, selon une étude publiée par l'Arcep (Autorité de régulation des communications électroniques et des postes), les adolescents envoyaient en moyenne 83 SMS (messages textes) par jour, soit environ 2 500 par mois. On admet qu'en France le nombre de SMS envoyés par un adolescent en un mois peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2500$ et d'écart-type $\sigma = 650$.

Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les probabilités arrondies au millième.

1. On calcule $p(2000 \leq X \leq 3000) \approx 0{,}558$
2. $p(X \geqslant 4000) \approx 0{,}011$.
3. On trouve $a \approx 3047$.
80 % des adolescents envoient moins de 3 047 SMS par mois.

Exercice 3 **5 points**
Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.
Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir.
En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année $2015 + n$. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1. **a.** $u_1 = 1,12 \times 75 - 6 = 78$.
En 2015, l'entreprise contractera 78 contrats d'entretien.

b. Une augmentation de 12% correspond à un coefficient multiplicateur de 1,12 soit $1,12u_n$ auquel il faut enlever les 6 contrats résiliés. On aura donc $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$.

2. L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.

   On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3		Traitement : Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à U la valeur 75
L5		Tant que $U \leqslant 100$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		U prend la valeur $1,12U-6$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher …

   a. On veut afficher l'année à partir de laquelle l'entreprise devra embaucher ; comme n correspond à l'année $2015+n$, la ligne L9 sera : Afficher $2015+n$

   b. On obtient le tableau suivant :

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de U	75	78	81	85	89	94	99	105

   c. L'algorithme affichera $2015+7$ soit 2022. L'entreprise devra embaucher en 2022.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$ et $u_0 = 75$.

   On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$, donc $u_n = v_n + 50$.

   a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 1,12u_n - 6 - 50 = 1,12\,(v_n + 50) - 56 = 1,12v_n + 56 - 56 = 1,12v_n$

   $v_0 = u_0 - 50 = 75 - 50 = 25$

   La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1,12$ et de premier terme $v_0 = 25$.

   b. On aura alors, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 25 \times 1,12^n$.

   Comme $u_n = v_n + 50$, on aura, pour tout n, $u_n = 25 \times 1,12^n + 50$

   c. On résout l'inéquation $u_n > 100$:

$$\begin{array}{rcll} u_n > 100 & \iff & 25 \times 1,12^n + 50 > 100 & \\ & \iff & 25 \times 1,12^n > 50 & \\ & \iff & 1,12^n > 2 & \\ & \iff & \ln(1,12^n) > \ln(2) & \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;+\infty[\\ & \iff & n \times \ln(1,12) > \ln(2) & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \iff & n > \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,12)} & \text{division par } \ln(1,12) > 0 \end{array}$$

   Or $\dfrac{\ln(2)}{\ln(1,12)} \approx 6,11$ donc pour $n \geqslant 7$, $u_n > 100$.

   d. On retrouve l'affichage de l'algorithme, soit l'année $2015+7$.

Exercice 3 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.
C'est la seule entreprise dans les environs. Aussi, les propriétaires de piscines n'ont que deux choix possibles : soit ils s'occupent eux-mêmes de l'entretien de leur piscine, soit ils souscrivent un contrat avec l'entreprise PiscinePlus.
On admet que le nombre de propriétaires de piscines est constant.
Le patron de cette entreprise remarque que chaque année :

- 12 % des particuliers qui entretenaient eux-mêmes leur piscine décident de souscrire un contrat avec l'entreprise PiscinePlus ;
- 20 % de particuliers sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus décident de le résilier pour entretenir eux-mêmes leur piscine.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste de sommets C et L où :

- C est l'évènement « Le particulier est sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus » ;
- L est l'évènement « Le particulier effectue lui-même l'entretien de sa piscine ».

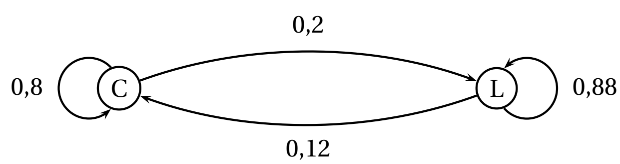
Chaque année, on choisit au hasard un particulier possédant une piscine et on note pour tout entier naturel n :

- c_n la probabilité que ce particulier soit sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus l'année $2015+n$;
- l_n la probabilité que ce particulier entretienne lui-même sa piscine l'année $2015+n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} c_n & l_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015+n$.
Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'entreprise PiscinePlus atteindra l'objectif d'avoir au moins 35 % des propriétaires de piscines comme clients sous contrat d'entretien.

Partie A

1. L'énoncé montre que $P_{L_n}(C_{n+1}) = 0,12$ et donc $P_{L_n}(L_{n+1}) = 1 - 0,12 = 0,88$, puis que $P_{C_n}(L_{n+1}) = 0,20$ et donc $P_{C_n}(C_{n+1}) = 1 - 0,20 = 0,80$.
D'où le graphe probabiliste :



2. a. La matrice de transition M de ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$. Les termes de cette matrice ne sont pas nuls, donc l'état P_n converge vers un état stable $P = \begin{pmatrix} c & l \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation :
$P = P \times M$ soit $\left\{\begin{array}{lcl} c & = & 0,8c + 0,12l \\ l & = & 0,2c + 0,88l \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,2c & = & 0,12l \\ 0,12l & = & 0,2c \end{array}\right.$
Mais on a de plus $c + l = 1$, donc c et l vérifient le système :
$\left\{\begin{array}{lcl} 0,2c & = & 0,12l \\ c+l & = & 1 \end{array}\right. \implies 0,2(1-l) = 0,12l \iff 0,2 - 0,2l = 0,12l \iff 0,2 = 0,32l \iff l = \dfrac{0,2}{0,32} = 0,625$, puis $c = 1 - 0,625 = 0,375$.
Donc l'état stable est $P = \begin{pmatrix} 0,375 & 0,625 \end{pmatrix}$.

b. L'état stable montre qu'au bout de plusieurs années l'entreprise aura 37,5 % de propriétaires de piscines sous contrat, soit plus que l'objectif de 35 %.

Partie B

En 2015, on sait que 15 % des propriétaires de piscines étaient sous contrat avec l'entreprise PiscinePlus. On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix}0,15 & 0,85\end{pmatrix}$.

1. Pour tout entier naturel n, on a $P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix}c_{n+1} & l_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_n & l_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\0,12 & 0,88\end{pmatrix}$

   donc $c_{n+1} = 0,8c_n + 0,12l_n$
   Or, pour tout n, $c_n + l_n = 1$ donc, pour tout entier naturel n,
   $c_{n+1} = 0,8c_n + 0,12(1 - c_n) = 0,8c_n + 0,12 - 0,12c_n = 0,68c_n + 0,12$

2. À l'aide d'un algorithme, on cherche à connaître au bout de combien d'années l'entreprise PiscinePlus atteindra son objectif :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		C est un nombre réel
L3	Traitement :	Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à C la valeur 0,15
L5		Tant que $C < 0,35$ faire
L6		n prend la valeur $n + 1$
L7		C prend la valeur $0,68C + 0,12$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher n

   a. On complète le tableau ci-dessous pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus :

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de C	0,15	0,222	0,271	0,304	0,327	0,342	0,353

   b. À la fin de l'exécution on lit $n = 6$, soit en 2021 année où l'objectif sera atteint.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $c_{n+1} = 0,68c_n + 0,12$ et que $c_0 = 0,15$.
   On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = c_n - 0,375$, donc $c_n = v_n + 0,375$.

   a. On a pour tout entier naturel n :
   $v_{n+1} = c_{n+1} - 0,375 = 0,68c_n + 0,12 - 0,375 = 0,68(v_n + 0,375) - 0,255 = 0,68v_n + 0,255 - 0,255 = 0,68v_n$
   $v_0 = c_0 - 0,375 = 0,15 - 0,375 = -0,225$
   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,68$ et de premier terme $v_0 = -0,225$.
   On admet que, pour tout entier naturel n, on a $c_n = -0,225 \times 0,68^n + 0,375$.

   b. On résout dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $c_n \geqslant 0,35$:

$$\begin{aligned}
c_n \geqslant 0,35 &\iff -0,225\times 0,68^n + 0,375 \geqslant 0,35 \\
&\iff 0,025 \geqslant 0,225\times 0,68^n \\
&\iff \frac{0,025}{0,225} \geqslant 0,68^n \\
&\iff \frac{1}{9} \geqslant 0,68^n \\
&\iff \ln\frac{1}{9} \geqslant \ln\left(0,68^n\right) && \text{croissance de la fonction ln sur }]0\,;\,+\infty[\\
&\iff \ln\frac{1}{9} \geqslant n\times \ln(0,68) && \text{propriété de la fonction ln} \\
&\iff \frac{\ln\frac{1}{9}}{\ln(0,68)} \leqslant n && \text{division par } \ln(0,68) < 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\frac{1}{9}}{\ln 0,68} \approx 5,7$; il faut donc $n \geqslant 6$.

c. On retrouve le fait qu'au bout de 6 ans l'objectif de l'entreprise (35 % de contrats chez les propriétaires de piscine) sera atteint.

Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ par : $f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
   La dérivée de la fonction e^{-2x+10} est $-2\mathrm{e}^{-2x+10}$ (forme $e^{u(x)}$) ;
   on aura donc $f'(x) = -2 - \left(-2\mathrm{e}^{-2x+10}\right) = -2 + 2\mathrm{e}^{-2x+10} = 2\left(-1 + \mathrm{e}^{-2x+10}\right)$.
2. **a.** $f'(x) \geqslant 0 \iff -1 + \mathrm{e}^{-2x+10} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-2x+10} \geqslant 1 \iff -2x + 10 \geqslant \ln 1 \iff 10 \geqslant 2x \iff 5 \geqslant x$

   b. On a alors :

x	3		5		13
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$14 - \mathrm{e}^4$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-6 - \mathrm{e}^{-16}$

   c. Une primitive de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x+10}$ est $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+10}$.

   Une primitive de la fonction f sera la fonction F définie par : $F(x) = -x^2 + 20x + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+10}$

   On a alors :

$$\begin{aligned}\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_3^{13} = F(13)-F(3) &= -13^2+20\times 13+\frac{1}{2}e^{-2\times 13+10}-\left(-3^2+20\times 3+\frac{1}{2}e^{-2\times 3+10}\right)\\ &= 40+\frac{1}{2}e^{-16}-\frac{1}{2}e^{4}\approx 12{,}701.\end{aligned}$$

Partie B : Application

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ par la fonction f.
En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

1. En utilisant le tableau de variation, il faut que l'entreprise fournisse 500 toboggans et son bénéfice sera de 9 000 euros.

2. On utilise la valeur moyenne de la fonction f soit $\dfrac{1}{13-3}\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{10}40+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-16}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4}\approx 1{,}270.$
Le bénéfice moyen sera donc de 1 270 euros.

Partie C : Rentabilité

Le nénéfice est représenté par la fonction f ; on va chercher pour quelles valeurs de x, $f(x)>0$. Pour cela, il faut déterminer les solutions de l'équation $f(x)=0$.
$14-\mathrm{e}^4<0$ et $-6-\mathrm{e}^{-16}<0$; on complète le tableau de variation précédent :

x	3	α	5	β	13
$f(x)$	$14-\mathrm{e}^4$ ↗	0 ↗	9	↘ 0	↘ $-6-\mathrm{e}^{-16}$

D'après le tableau de variation, il existe deux nombres α et β solutions de l'équation $f(x)=0$.

$\left.\begin{array}{l} f(3)\approx -40,6<0\\ f(4)\approx 4,6>0\end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha\in[3\,;\,4]$

$\left.\begin{array}{l} f(3,7)\approx -0,86<0\\ f(3,8)\approx 1,58>0\end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha\in[3,7\,;\,3,8]$

$\left.\begin{array}{l} f(3,73)\approx -0,14<0\\ f(3,74)\approx 0,09>0\end{array}\right\}\Longrightarrow \alpha\in[3,73\,;\,3,74]$

et

$\left.\begin{array}{l} f(9)\approx 2>0\\ f(10)\approx -0{,}000\,05<0\end{array}\right\}\Longrightarrow \beta\in[9\,;\,10]$

$\left.\begin{array}{l} f(9,9)\approx 0,2>0\\ f(10)\approx -0{,}000\,05<0\end{array}\right\}\Longrightarrow \beta\in[9,9\,;\,10,0]$

$\left.\begin{array}{l} f(9,99)\approx 0,0>0\\ f(10)\approx -0{,}000\,05<0\end{array}\right\}\Longrightarrow \beta\in[9,99\,;\,10,00]$

L'entreprise doit donc fabriquer entre 374 et 999 toboggans pour être rentable.