Corrigé du baccalauréat Nouvelle-Calédonie

26 octobre 2022 Jour 1
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : **4 heures**

EXERCICE 1 7 points **probabilités**

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

1. a. On a $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0} -6x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} -4\ln x = -\infty$ et par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Graphiquement ce résultat montre que la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées est asymptotoe verticale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

b. On a puisque $x > 0$, $\quad x^2 - 6x = x^2\left(1 - \dfrac{6}{x}\right)$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{x} = 0$, donc
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{6}{x} = 1$ (par somme de limites), puis
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, d'où
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{6}{x}\right) = +\infty$ (par produit de limites) ; enfin
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc finalement :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (par somme de limites).

2. a. Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $\ f$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = 2x - 6 + 4 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$.

b. Comme $x > 0$, le signe du quotient est celui du numérateur, donc du trinôme $2x^2 - 6x + 4$ ou plus simplement du trinôme $x^2 - 3x + 2$.

Celui-ci a une racine évidente : 1 et l'autre 2 (puisque le produit des racines est 2).

On alors que $f'(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $]1\,;\,2[$ où $f'(x) < 0$

La fonction f est donc croissante sauf sur l'intervalle $]1\,;\,2[$ où elle est décroissante.

On a $f(1) = 1 - 6 + 4\ln 1 = 0 - 5 = -5$ et $f(2) = 4 - 12 + 4\ln 2 = 4\ln 2 - 8 \approx -5{,}23$.

D'où le tableau de variations :

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-5	↘	$\ln(2)-8$	↗	$+\infty$

3. • On a $f(4) = 16-24+4\ln 4 = -8+8\ln 2 \approx -2{,}45$ et $f(5) = 25-30+4\ln 25 = 4\ln 5-5 \approx 1{,}44$;

• Sur l'intervalle $[4\,;5]$, la fonction est continue car dérivable et strictement croissante de $f(4) < 0$ à $f(5) > 0$, donc :

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]4\ ;\ 5[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

4. $f''(x) = \dfrac{2x^2-4}{x^2}$.

a. On a $2x^2-4 = 0 \iff 2\left(x^2-2\right) = 0 \iff x^2-2 = 0 \iff \left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x+\sqrt{2} = 0 \\ x-\sqrt{2} = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$

Le trinôme, donc $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $\left]-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\right[$ ou ici puisque $x > 0$, $f''(x)$ est positif sauf sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \sqrt{2}\right[$. Conclusion :

- Sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \sqrt{2}\right]$, $f''(x) < 0$, la fonction f est concave ;
- Sur l'intervalle $\left]\sqrt{2}\ ;\ +\infty\right]$, $f''(x) > 0$, la fonction f est convexe ;
- $f''\left(\sqrt{2}\right) = 0$: le point d'abscisse $\sqrt{2}$, donc d'ordonnée $f\,() = 2-6\sqrt{2}+4\ln\sqrt{2} = 2-6\sqrt{2}+4\times\dfrac{1}{2}\ln 2 = 2-6\sqrt{2}+2\ln 2$ est le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$, car en ce point la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

b. • Pour $k \in]0\,;\sqrt{2}[$, $[AM_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction concave donc $[AM_k]$ est en dessous de $\mathscr{C}_f$.

• Pour $k \in \left]\sqrt{2}\ ;\ +\infty\right[$, $[AM_k]$ est une corde de la courbe d'une fonction convexe donc $[AM_k]$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 2   7 points   probabilités

$$f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{x}.$$

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

a. • $u_1 = (-1)^3\,\mathrm{e}^{-1} = -\,\mathrm{e}^{-1} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -0{,}368$;

• $u_2 = f\left(u_1\right) = \left(-\,\mathrm{e}^{-1}\right)^3\left(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{e}^{-1}}\right) = -\,\mathrm{e}^{-3}\times\left(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{e}^{-1}}\right) = -\,\mathrm{e}^{-3-\,\mathrm{e}^{-1}} \approx -0{,}034$.

b. On a `fonc(2)`$= u_2 \approx -0{,}034$.

2. a. En dérivant $f(x)$ comme un produit on obtient :

$f'(x) = 3x^2\,\mathrm{e}^{x}+x^3\,\mathrm{e}^{x} = x^2\,\mathrm{e}^{x}(3+x)$.

b.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
	0				$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-27\,\mathrm{e}^{-3}$		

- Quel que soit le réel x, $x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3+x$ qui s'annule pour $x=-3$, d'où les deux intervalles de variations ;

$3+x<0 \iff x<-3$: sur $]-\infty\,;\,-3[$, $f'(x)<0$: la fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,-3[$;

$3+x>0 \iff x>-3$: sur $]-3\,;\,+\infty[$, $f'(x)>0$: la fonction f est donc croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$;

$f(-3)=(-3)^3\times\mathrm{e}^{-3}=-27\,\mathrm{e}^{-3}=-\dfrac{27}{\mathrm{e}^{3}}\approx -1{,}344$ est le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$.

- On a $f(0)=0^3\times\mathrm{e}^0=0\times 1=0$;
- De $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x}=+\infty$, on a par produit de limites

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c. *Initialisation* : avec $u_0=-1$ et $u_1\approx -0{,}368$, on a bien : $-1\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $-1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 0$.

On a vu que sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, la fonction est strictement croissante.

On a donc par croissance de f : $f(-1)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(0)$, ou encore :

$u_1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant f(0)$

et comme $u_1\approx -0{,}338$, $-1\leqslant u_1$ et $f(0)=0$, on a bien :

$-1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 0$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n, $n\in\mathbb{N}$, il est encore vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a : $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 0$.

d. La question précédente montre que :

- la suite (u_n) est croissante ;
- la suite (u_n) est majorée par 0 ;

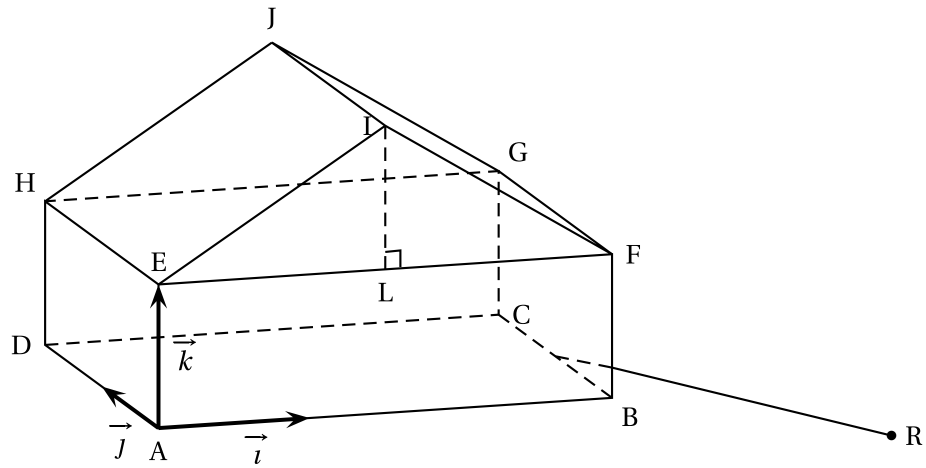
La suite (u_n) est donc convergente vers une limite ℓ, avec $\ell\leqslant 0$.

e. On résout dans $]-1\,;\,0[$, (car d'après la question précédente tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle) l'équation :

$f(x)=x \iff x^3\,\mathrm{e}^{x}=x \iff x^3\,\mathrm{e}^{x}-x=0 \iff x\left(x^2\,\mathrm{e}^{x}-1\right)=0 \iff x=0$, car on admet que l'équation $x^2\,\mathrm{e}^{x}-1=0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $]-1\,;\,0[$.

Conclusion $\ell=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

EXERCICE 3 7 points



1. On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Donc G(3 ; 2 ; 1).
2. On sait que $M(x\,;\ y\,;\ z) \in (\text{EHI}) \iff 2x + 0y - 3z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.
   Ainsi, par exemple $\text{E}(0\,;\ 0\,;\ 1) \in (\text{EHI}) \iff 2\times 0 + 0\times 0 - 3\times 1 = d \iff d = -3$.
   Donc $M(x\,;\ y\,;\ z) \in (\text{EHI}) \iff 2x - 3z = -3$
3. Puisque (EIF) est isocèle en I le projeté orthogonal de I sur [EF] est le milieu de [EF] ; ces deux points ont donc la même abscisse qui est aussi celle du milieu de [AB] soit $\dfrac{3}{2}$.
   L'ordonnée de I est aussi celle de E soit 0, enfin
   $\text{I}\left(\dfrac{3}{2}\,;\ 0\,;\ z\right) \in (\text{EHI}) \iff 2\times\dfrac{3}{2} - 3z = -3 \iff 3z = 3 + 3 \iff z = 2$. Donc $\text{I}\left(\dfrac{3}{2}\,;\ 0\,;\ 2\right)$.
4. • Avec le produit scalaire : avec E(0 ; 0 ; 1) et F(3 ; 0 ; 1), on a $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2}\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2}\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$, donc :

   $\text{IE}^2 = \dfrac{9}{4} + 0 + 1 = \dfrac{13}{4}$, d'où $\text{IE} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$;

   $\text{IF}^2 = \dfrac{9}{4} + 0 + 1 = \dfrac{13}{4}$, d'où $\text{IF} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$;

   Donc $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF} = \text{IE}\times\text{IF}\times\cos\left(\overrightarrow{IF}\,;\ \right)$, soit :

   $-\dfrac{9}{4} + 0 + 1 = \dfrac{\sqrt{13}}{2}\times\dfrac{\sqrt{13}}{2}\times\cos\left(\overrightarrow{IE}\,;\ \overrightarrow{IF}\right) \iff \dfrac{-5}{4} = \dfrac{13}{4}\times\cos\left(\overrightarrow{IE}\,;\ \overrightarrow{IF}\right)$.

   Finalement $\cos\left(\overrightarrow{IE}\,;\ \overrightarrow{IF}\right) = \dfrac{\frac{-5}{4}}{\frac{13}{4}} = -\dfrac{5}{13}$. La calculatrice donne $\left(\overrightarrow{IE}\,;\ \overrightarrow{IF}\right) \approx 112{,}6°$.

   • Avec le triangle (IEL) rectangle en L (L projeté orthogonal de I sur (EF) :

   On a $\text{L}\left(\dfrac{3}{2}\,;\ 0\,;\ 1\right)$, donc $\text{IL}^2 = 0 + 0 + 1^2 = 1$, d'où IL = 1 ;

On a vu que $\text{EI}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, d'où $\cos\left(\widehat{\text{EIL}}\right)=\dfrac{\text{IL}}{\text{IE}}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{13}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$: la calculatrice donne

$\left(\widehat{\text{EIL}}\right)\approx 56{,}30°$; donc $\widehat{\text{EIF}}=2\widehat{\text{EIL}}\approx 2\times 56{,}30$, soit finalement $\widehat{\text{EIF}}\approx 112{,}6°$.

5. **a.** On sait que $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\Delta \iff \overrightarrow{\text{R}M}=t\overrightarrow{u} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-6 &=& -3t\\ y+3 &=& 4t\\ z+1 &=& 1t\end{array}\right.,\ (t\in\mathbb{R}) \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6-3t\\ y &=& -3+4t\\ z &=& -1+\ t\end{array}\right.,\quad (t\in\mathbb{R}).$

b. K$(x\,;\,y\,;\,z)$ est commun à Δ et au plan (BFG) si ses coordonnées vérifient les équations paramétriques de Δ et l'équation cartésienne du plan (BFG) soit si le triplet de réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifie le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6-3t\\ y &=& -3+4t\\ z &=& -1+t\\ x &=& 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3 &=& 6-3t\\ y &=& -3+4t\\ z &=& -1+t\\ x &=& 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3t &=& 3\\ y &=& -3+4t\\ z &=& -1+t\\ x &=& 3\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1\\ y &=& -3+4\\ z &=& -1+1\\ x &=& 3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1\\ y &=& 1\\ z &=& 0\\ x &=& 3\end{array}\right.$$

Conclusion : K(3 ; 1 ; 0).

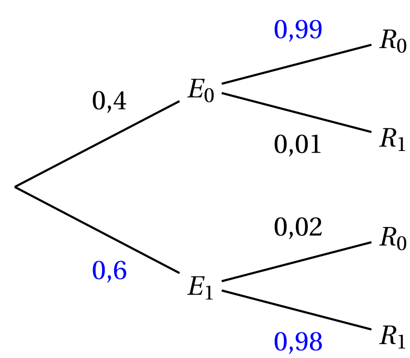
c. Avec B(3; 0; 0) et C(3; 2; 0) on remarque que les coordonnées de K sont les demi-sommes des coordonnées de B et de C, donc que K est le milieu du segment [BC].

EXERCICE 4 7 points

Principaux domaines abordés : probabilités.

On peut compléter l'arbre pondéré :

- E_0 : « le bit envoyé est un 0 » ;
- E_1 : « le bit envoyé est un 1 » ;
- R_0 : « le bit reçu est un 0 »
- R_1 : « le bit reçu est un 1 ».



On sait que :

$p(E_0)=0{,}4$; $\quad p_{R_0}(R_1)=0{,}01$; $\quad p_{R_1}(R_0)=0{,}02$.

On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $p_B(A)$.

On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. $p(E_0\cap R_0)=p(E_0)\times p_{E_0}(R_0)=0{,}4\times 0{,}99=0{,}396.$

2. On a aussi $p\left(E_1 \cap R_0\right) = p\left(E_1\right) \times p_{E_1}\left(R_0\right) = 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012$.

   D'après la loi des probabilités totales : $p\left(R_0\right) = p\left(E_0 \cap R_0\right) + p\left(E_1 \cap R_0\right) = 0{,}396 + 0{,}012 = 0{,}408$.

3. Avec $p\left(R_1\right) = 1 - p\left(R_0\right) = 1 - 0{,}408 = 0{,}592$;

   $p_{R_1}\left(E_0\right) = \dfrac{p\left(R_1 \cap E_0\right)}{p\left(R_1\right)} = \dfrac{p\left(E_0 \cap R_1\right)}{p\left(R_1\right)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}01}{0{,}592} = \dfrac{0{,}004}{0{,}592} \approx 0{,}0067$, soit environ 0,007 au millième près.

4. On a p(erreur de transmission) $= p\left(E_0 \cap R_1\right) + p\left(E_1 \cap R_0\right) = 0{,}4 \times 0{,}01 + 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}004 + 0{,}012 = 0{,}016$.

Un message de longueur huit bits est appelé un octet.

On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

5. On a une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}88$. Si x est la variable aléatoire égal au nombre d'octets transmis sans erreur, on a :

   $p(X = 7) = \binom{10}{7} \times 0{,}88^7 \times (1 - 0{,}88)^{10-7} = \binom{10}{7} \times 0{,}88^7 \times (0{,}12)^3 \approx 0{,}0847$ soit 0,085 au millième près.

6. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0{,}88^0 \times 0{,}12^{10} = 1 - 0{,}12^{10}$.

7. On a $p(X = 18) = 0{,}88^{18} \approx 0{,}109 > 0{,}1$. Donc $N_0 = 18$.