

∞ Corrigé du baccalauréat S La Réunion ∞  
29 juin 2010

**Exercice 1**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On note  $D$  la droite d'équation  $y = x$ .

**Partie A**

1. a. Sens de variation de la fonction  $f$  :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0 \text{ sur } ] -1 ; +\infty[$$

La fonction  $f$  est donc croissante sur  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

b. Limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -1^+} 1+x = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1+x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$$

Tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. On désigne par  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $] -1 ; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - x$ .

a.  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 1-x+\ln(1+x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -1^+} 1+x = 0^+, \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(1+x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1} 1-x = 2$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1+x = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) \left( \frac{1-x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} \right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1.$$

c. Sens de variation de la fonction  $g$

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \text{ du signe de } -x \text{ sur } ] -1 ; +\infty[$$

La fonction  $g$  est donc strictement croissante sur  $] -1; 0[$  et strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

Elle possède une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Tableau de variations de la fonction  $g$  :

$x$	$-1$	$\alpha$	$0$	$\beta$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	0	1	0	$-\infty$

d. Sur l'intervalle  $] - 1 ; 0[$ , la fonction  $g$  est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de  $] - 1 ; 0[$  sur  $] - \infty ; 1[$ . Or  $0$  appartient à l'ensemble d'arrivée  $] - \infty ; 1[$ . Donc,  $0$  possède un unique antécédent, noté  $\alpha$  dans  $] - 1 ; 0[$ .

Sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , la fonction  $g$  est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de  $]0 ; +\infty[$  sur  $] - \infty ; 1[$ . Or  $0$  appartient à l'ensemble d'arrivée  $] - \infty ; 1[$ . Donc,  $0$  possède un unique antécédent, noté  $\beta$  dans  $]0 ; +\infty[$ .

De plus :

$$\begin{cases} g(2) \approx 0,0986 > 0 \\ g(3) \approx -0,614 < 0 \end{cases} \implies 2 \leq \beta \leq 3$$

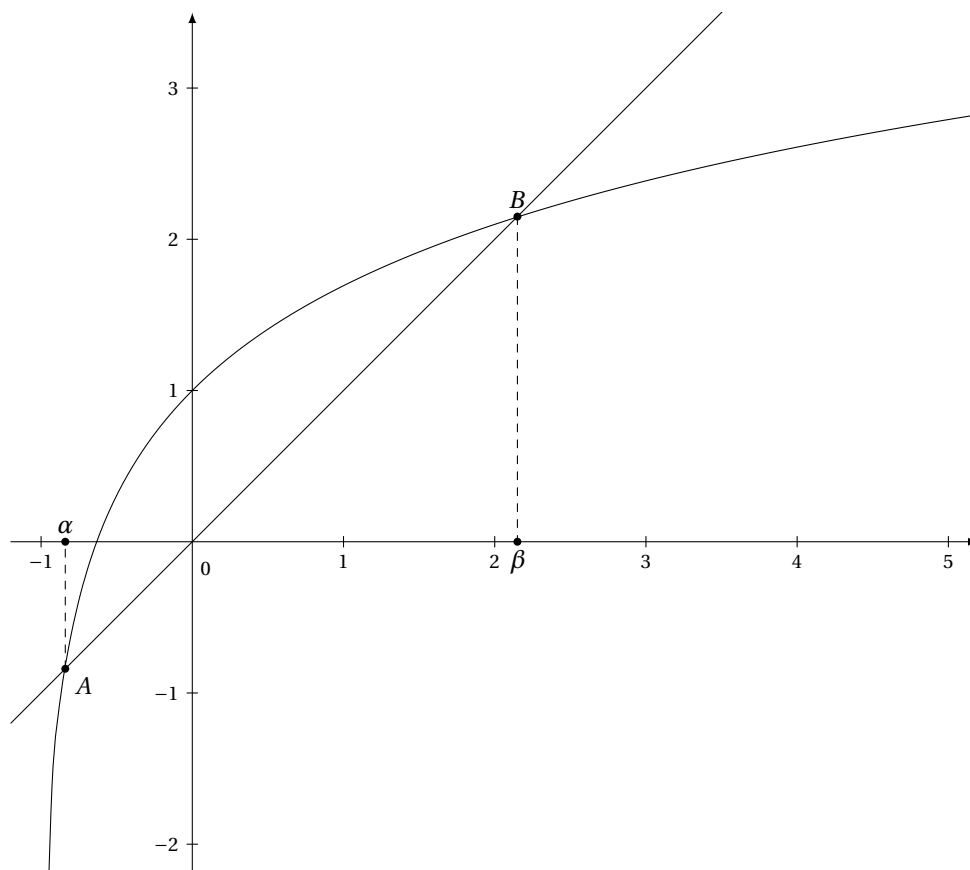
e. Signe de  $g(x)$  :

- $-1 < x \leq \alpha \implies g(x) \leq g(\alpha) = 0$ . (La fonction  $g$  est croissante sur  $[-1; \alpha]$ ).
- $\alpha \leq x \leq 0 \implies g(\alpha) = 0 \leq g(x)$ . (La fonction  $g$  est croissante sur  $[\alpha; 0]$ ).
- $0 \leq x \leq \beta \implies g(x) \geq 0 = g(\beta)$ . (La fonction  $g$  est décroissante sur  $[0; \beta]$ ).
- $x \geq \beta \implies g(x) \leq 0 = g(\beta)$ . (La fonction  $g$  est décroissante sur  $[\beta; +\infty]$ ).

$x$	$-1$	$\alpha$	$\beta$	$+\infty$	
Signe de $g(x)$	-	0	+	0	-
Position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $D$	$\mathcal{C}_f < (D)$	A	$\mathcal{C}_f > (D)$	B	$\mathcal{C}_f < (D)$

Position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de la droite  $D$  :

- $\mathcal{C}_f$  est située au dessus de la droite  $D$  pour  $x \in ]\alpha; \beta[$ .
- $\mathcal{C}_f$  est située en dessous de la droite  $D$  pour  $x \in ] - 1 ; \alpha[ \cup ]\beta; +\infty[$ .



### Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout nombre entier naturel  $n$  par : 
$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

1. Pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $2 \leq u_n \leq \beta$ . Démonstration par récurrence :
  - On a  $2 \leq u_0 = 2 \leq \beta$
  - Supposons que, pour un  $n$  donné, on ait :  $2 \leq u_n \leq \beta$ , alors, la fonction  $f$  étant croissante sur  $[2; \beta]$  :

$$2 \leq u_n \leq \beta \implies \boxed{2} \leq 2,09861228867 \approx f(2) \leq f(u_n) = \boxed{u_{n+1}} \leq f(\beta) = \boxed{\beta}$$

— Ainsi,  $\forall n, n \in \mathbb{N}, 2 \leq u_n \leq \beta$ .

2. La suite  $(u_n)$  est croissante (en utilisant le signe de  $g(x)$  étudié plus haut) :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0 \text{ sur } [2; \beta]$$

Donc,  $(u_n)$  étant une suite croissante et majorée par  $\beta$ , elle est convergente.

### Exercice 2

**4 points**

Commun à tous les candidats

## Partie I

On dispose d'un dé cubique  $A$  parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.

Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

On note  $V_1, N_1$  et  $R_1$  (respectivement  $V_2, N_2$  et  $R_2$ ) la couleur obtenue au premier (respectivement second) jet.

1. Probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires :

$$\text{Les deux jets étant indépendants, nous pouvons écrire : } p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \times p(N_2) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

2. Soit l'évènement  $C$  : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».

$$p(C) = p(V_1 \cap V_2) + p(N_1 \cap N_2) + p(R_1 \cap R_2) = p(V_1) \times p(V_2) + p(N_1) \times p(N_2) + p(R_1) \times p(R_2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{7}{18}$$

3. Probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes :

$$p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes :

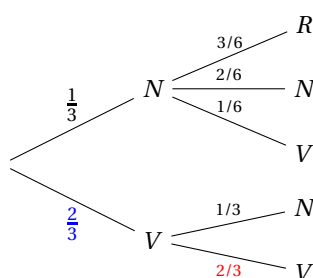
$$V \subset C \Rightarrow C \cap V = V \Rightarrow p_C(V) = \frac{p(C \cap V)}{p(C)} = \frac{p(V)}{p(C)} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\frac{7}{18}} = \frac{1}{36} \times \frac{36}{7} = \frac{1}{7}$$

## Partie II

On dispose d'un second dé cubique  $B$  équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé  $B$  ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé  $B$  et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé  $A$  et on note la couleur de la face obtenue.

1. a. Arbre de probabilités traduisant cette situation :



- b. Probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer :

$$p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3}$$

2. Probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à  $\frac{4}{9}$  :

$$p(V_1 \cap V_2) = p_{V_1}(V_2) \times p(V_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

3. Probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer :

$$p(V_2) = p(N_1 \cap V_2) + p(V_1 \cap V_2) = p_{N_1}(V_2) \times p(V_1) + p_{V_1}(V_2) \times p(V_1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

**Exercice 3****5 points**

Commun à tous les candidats

**Partie A**

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions  $f$ , définies et dérivables sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , vérifiant la condition (E) : pour tout nombre réel  $x$  strictement positif,  $xf'(x) - f(x) = x^2 e^{2x}$ .

1. Une fonction  $f$ , définie et dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , vérifie la condition (E), alors la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  vérifie, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$  :

$$g'(x) = \left( \frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{x^2 e^{2x}}{x^2} = e^{2x}$$

2. Ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  qui vérifient la condition (E) :

$$f \text{ vérifie } E \implies g'(x) = e^{2x} \implies g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + k = \frac{f(x)}{x} \implies f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + kx \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Réciproquement :

$$f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + kx \implies f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x} + k \implies xf'(x) - f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + x^2e^{2x} + kx - \frac{1}{2}xe^{2x} - kx = x^2e^{2x}$$

3. Fonction  $h$  définie et dérivable sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  vérifiant la condition (E) et s'annulant en  $\frac{1}{2}$  :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}e^1 + k\frac{1}{2} = 0 \iff k = -\frac{e}{2} \implies h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x$$

**Partie B**

On considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x = \frac{e}{2}x(e^{2x-1} - 1)$$

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. Signe de  $h(x)$  :  $x$  étant positif,  $h(x)$  est du signe de  $e^{2x-1} - 1$  et, comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  :

$$e^{2x-1} - 1 \geq 0 \iff e^{2x-1} \geq e^0 \iff 2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$$

Ainsi :

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $h(x)$	0	-	+

2. a. À l'aide d'une intégration par parties :

on pose :  $u = x$ , ainsi :  $u' = 1$   
 $v'(x) = e^{2x}$ , ainsi :  $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$  et :

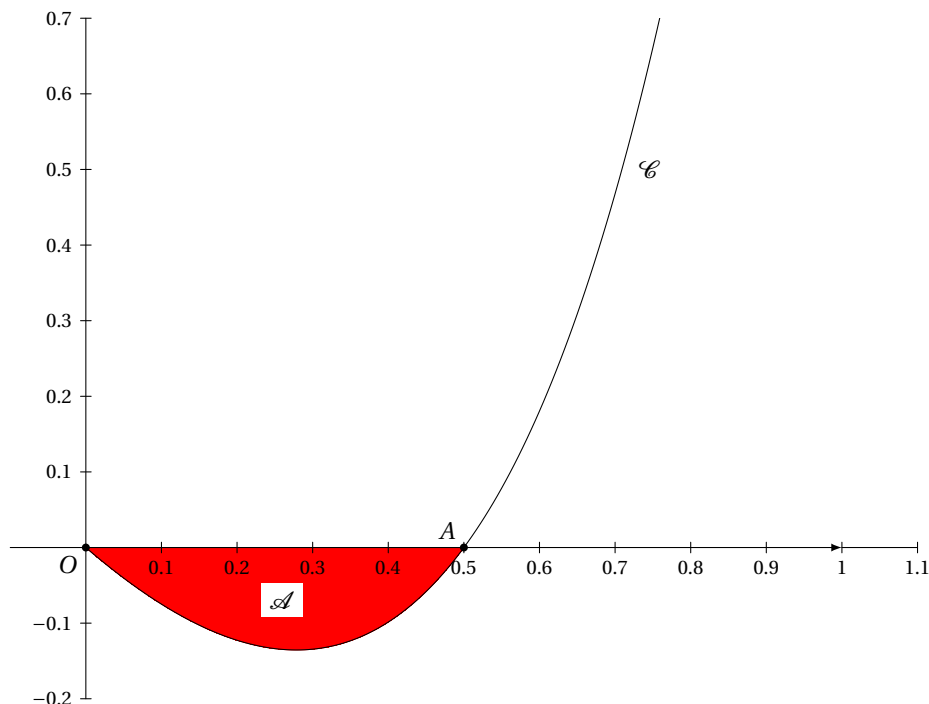
$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx = \left[ \frac{1}{2}xe^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{4}e - \left[ \frac{1}{4}e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}e + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Ainsi :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e}{2}x dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} - \left[ \frac{e}{2} \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{e}{16} = \frac{2-e}{16} \approx -0,04489$$

- b. La fonction  $h$  étant négative sur l'intervalle  $]0; \frac{1}{2}]$ , l'intégrale calculée plus haut est négative. Ainsi, en unité d'aire, la valeur exacte  $\mathcal{A}$  de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe  $\mathcal{C}$  est :

$$\mathcal{A} = \left| \frac{2-e}{16} \right| = \frac{e-2}{16}$$



#### Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

#### Partie I : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points du plan d'affixes respectives  $a, b, c$ .

On suppose que  $A$  et  $B$  sont distincts, ainsi que  $A$  et  $C$ .

On rappelle que  $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b-a) [2\pi]$ .

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) \\ &= -\arg(b-a) + \arg(c-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi] \end{aligned}$$

#### Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On considère le point  $A$  d'affixe  $1+i$ .

On associe, à tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$  non nulle, le point  $M'$  d'affixe

$$z' = \frac{z-1-i}{z}$$

Le point  $M'$  est appelé le point image du point  $M$ .

1. a. Affixe du point  $B'$ , sous forme algébrique, image du point  $B$  d'affixe  $i$  :

$$z_{B'} = \frac{i-1-i}{i} = \frac{-1}{i} = \frac{-i}{i^2} = i$$

- b. Pour tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$  non nulle, l'affixe  $z'$  du point  $M'$  est telle que  $z' \neq 1$ . En effet :

$$z' = 1 \iff \frac{z-1-i}{z} = 1 \iff z-1-i = z \iff -1-i = 0 \quad \text{impossible}$$

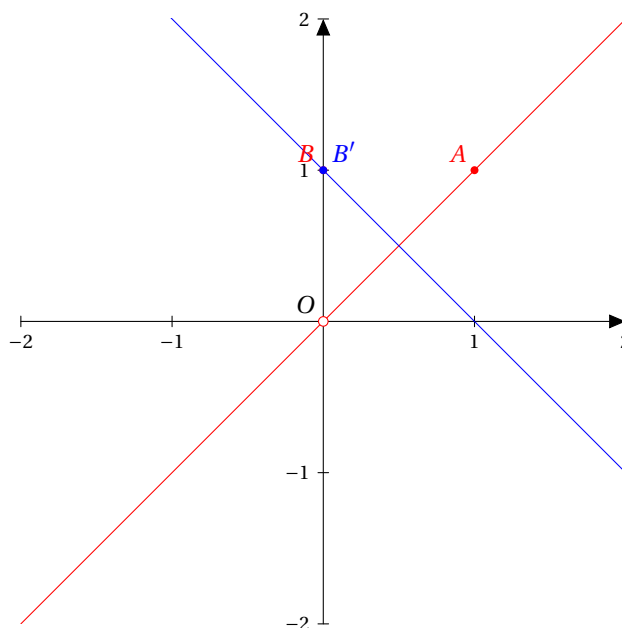
2. Ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z = x + iy$  non nulle pour lesquels l'affixe du point  $M'$  est telle que  $|z'| = 1$  est la droite d'équation  $y = -x + 1$  :

$$\begin{aligned} |z'| = 1 &\iff \left| \frac{z-1-i}{z} \right| = 1 \iff |z-1-i|^2 = |z|^2 \iff |x+iy-1-i|^2 = |x+iy|^2 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 \iff x + y - 1 = 0 \iff y = -x + 1 \end{aligned}$$

3. Ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  non nulle pour lesquels l'affixe du point  $M'$  est un nombre réel est la droite  $(OB)$  privée de  $O$  :

$$z' \in \mathbb{R} \iff \text{Arg}(z') = \text{Arg}\left(\frac{z-1-i}{z}\right) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \iff (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \iff O, A \text{ et } M \text{ alignés}$$

L'ensemble des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  non nulle pour lesquels l'affixe du point  $M'$  est un nombre réel est donc la droite  $(AO)$ , privée du point  $O$ .



#### EXERCICE 4

5 points

#### Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

#### Partie 1 : Restitution organisée de connaissances

Bien respecter les notations du sujet.

$s$  est une similitude directe du plan si, et seulement si, son écriture complexe est de la forme  $z' = \alpha z + \beta$ , où  $\alpha$  est un nombre complexe non nul et  $\beta$  est un nombre complexe.

Notons  $a, b, c$  et  $d$  les affixes respectives des points  $A, B, C$  et  $D$ .

$$\begin{cases} s(A) = B \\ s(C) = D \end{cases} \iff \begin{cases} b = \alpha a + \beta \\ d = \alpha c + \beta \end{cases}$$

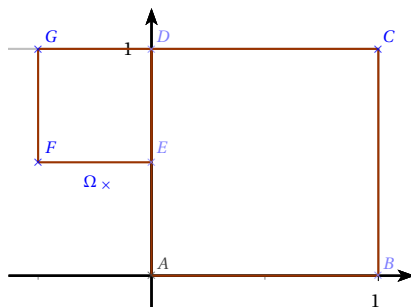
$s$  est une similitude directe du plan si, et seulement si, ce dernier système admet une unique solution pour  $(\alpha, \beta)$ . Or,

$$\begin{cases} b = \alpha a + \beta \\ d = \alpha c + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \alpha a + d - \alpha c \\ d - \alpha c = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - d = \alpha(a - c) \\ d - \alpha c = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{b-d}{a-c} \\ \beta = d - \frac{b-d}{a-c} \times c \end{cases} \quad \text{car } A \neq C$$

Le système ayant une unique solution, il existe une unique similitude directe transformant  $A$  en  $B$  et  $C$  en  $D$ .

### Partie II :

#### 1. a.



b.  $a = 0, b = 1, c = 1 + i, d = i, e = \frac{1}{2}i, f = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, g = -\frac{1}{2} + i$ .

c. Comme  $D \neq B$  et  $F \neq D$ , d'après la première partie, il existe une unique similitude directe  $s$  du plan telle que  $s(D) = F$  et  $s(B) = D$ .

2. Par définition  $s : \begin{matrix} D \mapsto F \\ B \mapsto D \end{matrix}$

a. Le rapport de  $s$  est donc  $k = \frac{FD}{DB}$  et l'angle  $\theta = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{FD})$ .

$$k = \left| \frac{d-f}{d-b} \right| = \frac{\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right|}{\left| -1 + i \right|} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\theta = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{FD}) = \pi + (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DF}) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$s$  a pour rapport  $\frac{1}{2}$  et pour angle  $\frac{\pi}{2}$ .

b. Avec les notations précédentes, on sait que  $\alpha = ke^{i\theta} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i$ .

On détermine  $\beta$  en écrivant que  $s(B) = D$ .

$$s(B) = D \Leftrightarrow d = \frac{1}{2}ib + \beta \Leftrightarrow i = \frac{1}{2}i + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}i.$$

Finalement, l'écriture complexe de  $s$  est

$$z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2}i.$$

c. On peut remarquer que  $s$  a bien un centre car  $\alpha \neq 1$ , donc cette similitude directe n'est pas une translation.

Le centre  $\Omega$  de la similitude directe  $s$  a pour affixe l'unique solution de l'équation  $z = \frac{1}{2}iz + \frac{1}{2}i$ .

On trouve sans difficulté que le centre  $\Omega$  a pour affixe  $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ .