Corrigé du baccalauréat S Liban 31 mai 2016

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. **a)** Le triangle AIE est rectangle en I. Par le théorème de Pythagore, on en déduit $EI^2 = AE^2 - AI^2$.

   D'autre part, $[AC]$ est une diagonale d'un carré de côté 1 et I est son milieu. On a donc $AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Finalement, $EI^2 = 1^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, ce qui donne

   $$\boxed{EI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$$

   I étant le centre du carré $ABCD$, ses coordonnées sont $I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

   D'autre part, $\overrightarrow{IE} = IE \times \overrightarrow{AK}$, ce qui donne $E\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

   Par un argument similaire, on trouve $F\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

   b) Ici, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs de base du plan (ABE).

   On choisit les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et on vérifie :

   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{n} = \left(\frac{1}{2}\right)\times(-2) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\sqrt{2} = -1+1 = 0$$

   Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABE).

   c) On connaît déjà un vecteur normal : $\overrightarrow{n}$. On sait qu'il existe un nombre a tel qu'une équation cartésienne de ce plan s'écrit

   $$-2y + \sqrt{2}z + a = 0$$

   Comme A appartient au plan, on en déduit $-2\times 0 + \sqrt{2}\times 0 + a = 0$, ce qui donne $a = 0$. Finalement, une équation cartésienne du plan est :

   $$\boxed{-2y + \sqrt{2}z = 0 \text{ ou } -y\sqrt{2} + z = 0}$$

2. **a)** On va prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est également normal au plan (FDC) en utilisant deux vecteurs de base de ce plan.

On calcule par exemple, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{-1}{2}\\\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$. On vérifie là encore :

$$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \text{ et } \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{n} = \left(\frac{-1}{2}\right)\times(-2) + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\times\sqrt{2} = 1-1 = 0$$

Les plans (ABE) et (FDC) ont un vecteur normal commun, ils sont donc parallèles.

b) (EMN) coupe les plans (ABE) et (FDC) en deux droites parallèles.
On en déduit que la droite correspondant à l'intersection de (EMN) et (FDC) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{NE}$ et passe par M.

On peut donc déterminer une équation paramétrique de cette droite en calculant $\overrightarrow{NE}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\\\frac{-\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}$.

On obtient ainsi l'équation paramétrique de cette intersection.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcll} x & = & \frac{1}{4} & \\ y & = & \frac{3}{4} & +\frac{1}{2}t \\ z & = & \frac{-\sqrt{2}}{4} & +\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}}$$

c) On a appelé Q l'intersection du plan (EMN) avec l'arête $[AF]$ et P l'intersection de ce même plan avec l'arête $[DC]$.
D'après ce qui précède (MP) et (EN) sont parallèles ; ce qui permet de construire le point P.
Par des arguments semblables, on peut prouver que les plans (ABF) et (EDC) sont parallèles, ce qui entraîne le parallélisme des droites (NQ) et (EP) et permet ainsi de construire le point Q.
L'intersection est ainsi le pentagone $ENQMP$ dont les côtés $[EN]$ et $[MP]$ sont parallèles ainsi que les côtés $[NQ]$ et $[EP]$.

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. L'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 20$; $p = \dfrac{1}{2}$.
En effet, les lancers sont indépendants et, pour chaque lancer, la probabilité d'envoyer à droite vaut $\dfrac{1}{2}$ si l'on se fie au manuel. Le nombre X de balles envoyées à droite suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$; $p = \dfrac{1}{2}$..
À l'aide de la calculatrice, on obtient une probabilité de

$$\boxed{P(X = 10) \simeq 0,176}$$

d'avoir exactement 10 balles à droite.

2. Ici, avec les mêmes notations, on calcule

$$\boxed{P(5 \leqslant X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 4) \simeq 0,582}.$$

Partie B

On vérifie les conditions d'application du calcul de l'intervalle asymptotique de fluctuation des fréquences :

- le nombre n de répétitions est supérieur à 30.
- $np = 100 \times 0,5 = 50 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 100 \times 0,5 = 50 \geqslant 5$ où p désigne la probabilité d'envoyer à droite à chaque lancer.

On calcule l'intervalle asymptotique de fluctuation à 95% de la fréquence des balles envoyées à droite :

$$\boxed{\left[0,5 - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = [0,402\ ;\ 0,598]}$$

La fréquence observée $\frac{42}{100} = 0,42$ est bien dans cet intervalle. On n'a donc pas de raison de remettre en cause l'affirmation du fabricant.

Partie C

On note L l'événement « la balle est liftée » et D l'événement « la balle est envoyée à droite ».
À partir des données de l'énoncé, on a $P(L \cap D) = 0,24$ et $P\left(\overline{L} \cap \overline{D}\right) = 0,235$.
Ici, on cherche $P_{\overline{L}}(D)$. Commençons par calculer $P\left(\overline{L}\right)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$P\left(\overline{L}\right) = P\left(\overline{L} \cap D\right) + P\left(\overline{L} \cap \overline{D}\right)$$

Il nous faut ainsi déterminer $P\left(\overline{L} \cap D\right)$ mais on sait, toujours d'après la formule des probabilités totales, que $P(D) = P\left(\overline{L} \cap D\right) + P\left(L \cap D\right)$. On obtient ainsi :

$$P\left(\overline{L} \cap D\right) = P(D) - P(L \cap D) = 0,5 - 0,24 = 0,26$$

Ce qui donne donc :

$$P\left(\overline{L}\right) = 0,26 + 0,235 = 0,495$$

Et, finalement :

$$\boxed{P_{\overline{L}}(D) = \frac{P\left(\overline{L} \cap D\right)}{P\left(\overline{L}\right)} = \frac{0,26}{0,495} \simeq 0,525}$$

Exercice 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On peut utiliser ici les fonctions associées en considérant la décomposition algorithmique suivante de la fonction f :

$$x \mapsto 1-x \mapsto \mathrm{e}^{1-x} \mapsto 1+\mathrm{e}^{1-x} \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}$$

Quels que soient u et v de l'intervalle $[0;1]$ tels que $u < v$, on a

$$0 \leqslant u < v \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant -v < -u \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant 1-v < 1-u \leqslant 1$$

Or la fonction exponentielle est strictement croissante donc

$$1 \leqslant \mathrm{e}^{1-v} < \mathrm{e}^{1-u} \leqslant \mathrm{e}^{1}$$

Et par suite

$$2 \leqslant 1+\mathrm{e}^{1-v} < 1+\mathrm{e}^{1-u} \leqslant 1+\mathrm{e}$$

Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;\ +\infty[$, on en déduit :

$$\frac{1}{1+e} \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1-u}} < \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1-v}} \leqslant \frac{1}{2}, \text{ soit } \frac{1}{1+e} \leqslant f(u) < f(v) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la fonction f est strictement croissante.
Bien sûr, on pouvait aussi dériver f pour prouver ce résultat !

2. On « force » la factorisation par e^{-x} au dénominateur. Pour tout x de $[0\ ;\ 1]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}+\frac{\mathrm{e}^{1-x}}{\mathrm{e}^{-x}}\right)} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{1-x+x}\right)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}} \end{aligned}$$

3. L'écriture précédente permet de déterminer une primitive de f.
En effet, la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}$ est $x \mapsto \mathrm{e}^{x}$ et on reconnaît donc que f est la dérivée de $x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}\right)$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\ln\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}\right)\right]_0^1 \\ &= \ln\left(\mathrm{e}^{1}+\mathrm{e}\right)-\ln(1+\mathrm{e}) \\ &= \ln(2\mathrm{e})-\ln(1+\mathrm{e}) \\ &= \ln(2)+\ln(\mathrm{e})-\ln(1+\mathrm{e}) \text{ (d'après les propriétés du logarithme)} \\ &= \ln(2)+1-\ln(1+\mathrm{e}) \end{aligned}$$

Partie B

1. Un peu de calcul montre que f_0 est la fonction constante égale à 1. On a tracé cette fonction en annexe.
2. Pour tout x et pour tout entier naturel n, on a $1+n\mathrm{e}^{1-x} > 1$ car la fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives. En particulier les f_n sont des fonctions strictement positives.
   u_n correspond donc à l'aire du domaine délimité par :
   - la courbe $\mathscr{C}_n$
   - l'axe des abscisses
   - les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$
3. Ces domaines semblent « rétrécir » quand n augmente. On conjecture donc que u est décroissante.
   Pour tout n entier naturel et pour tout x, on vérifie $0 \leqslant n\mathrm{e}^{1-x} < (n+1)\mathrm{e}^{1-x}$ car e^{1-x} est un nombre strictement positif. On obtient donc
   $1 \leqslant 1+n\mathrm{e}^{1-x} < 1+(n+1)\mathrm{e}^{1-x}$. Et comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on en déduit :
   $$f_n(x) > f_{n+1}(x)$$
   En raison des propriétés de l'intégrale, on obtient bien :
   $$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x > \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x$$
   Cela confirme la conjecture émise : u est strictement décroissante.
4. La suite étant décroissante, elle admet forcément une limite : un nombre ou bien $-\infty$.
   Nous allons maintenant préciser qu'il s'agit d'un nombre.
   Pour tout n, u_n est positif car c'est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0;\ 1]$. La suite u étant à la fois minorée par 0 et décroissante, le théorème de convergence monotone entraîne l'existence d'une limite finie pour la suite u.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Affirmation 1 :

Ici, on ne connaît pas l'écart-type σ. Il faut d'une manière ou d'une autre le déterminer.
On peut remarquer que $0,34$ est la moitié de $0,68$ et, ainsi, l'intervalle $[20;\ 21,6]$ correspond à $[\mu;\ \mu+\sigma]$. On a donc $\sigma = 21,6-20 = 1,6$. La probabilité recherchée s'obtient à la calculatrice et vaut $P(X \geqslant 23,2) \simeq 0,0228$.
L'affirmation est donc **fausse**.
Une autre manière de retrouver σ consistait à centrer-réduire X. En effet, on avait l'équivalence :

$$X \in [20;\ 21,6] \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \in \left[0\,;\,\frac{1,6}{\sigma}\right]$$

Il fallait ensuite raisonner sur la loi normale centrée réduite et utiliser ses propriétés de symétrie pour retrouver σ par inversion de la fonction de répartition.

Affirmation 2 :

On a $|Z| = 1 \iff \dfrac{|iz|}{|z-2|} = 1 \iff |z| = |z-2|$. On reconnaît ici la condition d'appartenance à la médiatrice du segment $[OB]$ avec $B\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ le point d'affixe 2.
En particulier, A, qui est le milieu de $[OB]$, appartient bien à cette droite.
L'affirmation est donc **vraie**.

Affirmation 3 :

Pour tout z, on pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ où x et y sont des réels.
Pour $z \neq 2$, $Z = \dfrac{\mathrm{i}\,z}{z-2} = \dfrac{\mathrm{i}\,(x+\mathrm{i}\,y)}{x+\mathrm{i}\,y-2} = \dfrac{\mathrm{i}\,(x+\mathrm{i}\,y)}{x+\mathrm{i}\,y-2} \times \dfrac{x-\mathrm{i}\,y-2}{x-\mathrm{i}\,y-2} = \dfrac{(\mathrm{i}\,x-y)(x-\mathrm{i}\,y-2)}{(x+\mathrm{i}\,y-2)(x-\mathrm{i}\,y-2)}$

$$= \dfrac{\mathrm{i}\,x^2+xy-2\,\mathrm{i}\,x-xy+\mathrm{i}\,y^2+2y}{(x-2)^2+y^2} = \dfrac{2y}{(x-2)^2+y^2} + \mathrm{i}\,\dfrac{x^2-2x+y^2}{(x-2)^2+y^2}$$

Z imaginaire pur $\iff \dfrac{2y}{(x-2)^2+y^2} = 0 \iff y = 0 \iff z$ est un réel
L'affirmation est donc **vraie**.

Affirmation 4 :

Un raisonnement équivalent à celui mené au début de l'exercice 3 permet de prouver que f est strictement croissante. De plus, elle est continue. Il suffit donc de calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ et le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permettra de se prononcer au sujet de cette affirmation.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$ (par composition) et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{4}$ par produit, somme et quotient.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Comme $0,5 \in \left]0\,;\ \dfrac{3}{4}\right[$, ce nombre possède bien un unique antécédent par f.
L'affirmation est donc **vraie**.

Affirmation 5 :

On sort de la boucle dès que $f(X) \geqslant 0,5$ et on affiche la valeur de X à ce moment là.
Or on vérifie à la calculatrice que $f(0,54) < 0,5$.
L'affirmation est donc **fausse**.

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Affirmation 1 :

On vérifie que $11 \equiv 1 \quad [5]$ et $11 \equiv 3 \quad [4]$.
En particulier, si n est solution du système, on a $n - 11 \equiv 0 \quad [5]$ et $n - 11 \equiv 0 \quad [4]$. L'affirmation est donc **vraie**.

Affirmation 2 :

On a $20 \equiv 0 \quad [5]$ et $20 \equiv 0 \quad [4]$ donc, pour tout entier k, $20k \equiv 0 \quad [5]$ et $20k \equiv 0 \quad [4]$.
En particulier, $20k + 11 \equiv 1 \quad [5]$ et $20k + 11 \equiv 3 \quad [4]$. L'affirmation est donc **vraie**.

Affirmation 3 :

On reprend la première affirmation. On sait que $n - 11$ est divisible par 4 et 5 qui sont premiers entre eux.
Donc $n - 11$ est divisible par 20. L'affirmation est donc **vraie**.

Affirmation 4 :

L'algorithme initialise bien les variables à partir des données du problème. En effet, au départ, $P(B) = 1$ soit $b_0 = 1$.
En revanche, l'affectation de a dans la boucle pose problème. En effet, la lecture du graphe permet d'affirmer que $a_{n+1} = 0,3a_n + 0,8b_n$ et ce qui est proposé correspond plutôt à $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,3b_n$.
L'affirmation est donc **fausse**.

Affirmation 5 :

On va utiliser ici les matrices de transition.
On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$, de sorte que, pour tout n, $X_{n+1} = MX_n$.

On doit calculer $X_4 = M^4 X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une application numérique donne $X_4 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. L'affirmation est donc **vraie**.

Exercice 5 — 3 points

Commun à tous les candidats

1. **a)** Pour tout n :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= z_{n+1} - z_a \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 - (4 + 2\mathrm{i}) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 1 - 2\mathrm{i} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(z_n + \frac{1-2\mathrm{i}}{\frac{1}{2}\mathrm{i}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(z_n + \frac{\mathrm{i}(2-4\mathrm{i})}{\mathrm{i}^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(z_n - (2\mathrm{i}+4)) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(z_n - z_A) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{i}u_n
\end{aligned}$$

b) Cette égalité rappelle les formules explicites de suites géométriques. Comme ce résultat concernant les complexes n'est pas au programme de terminale S, nous allons le démontrer par récurrence.

Vérifions l'initialisation. On sait que $u_0 = z_0 - z_A = -z_A$ et d'autre part $\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^0 (-4-2\mathrm{i}) = -z_A$. La propriété est donc initialisée.

Supposons que, pour tout entier p, on ait $u_p = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^p (-4-2\mathrm{i})$.

Au rang $p+1$, il vient :

$$u_{p+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i}u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) \times \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^p (-4-2\mathrm{i}) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{p+1} (-4-2\mathrm{i}).$$

La propriété est donc également héréditaire.
La propriété est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang p, elle est vraie au rang $p+1$, donc d'après le principe de récurrence, elle est vérifiée pour tout entier.

2. On utilise le critère de colinéarité dans le plan complexe. Il s'agit de prouver que $\dfrac{z_{n+4} - z_A}{z_n - z_A}$ est un réel, ce qui équivaut à vérifier que $\dfrac{u_{n+4}}{u_n}$ est un réel.

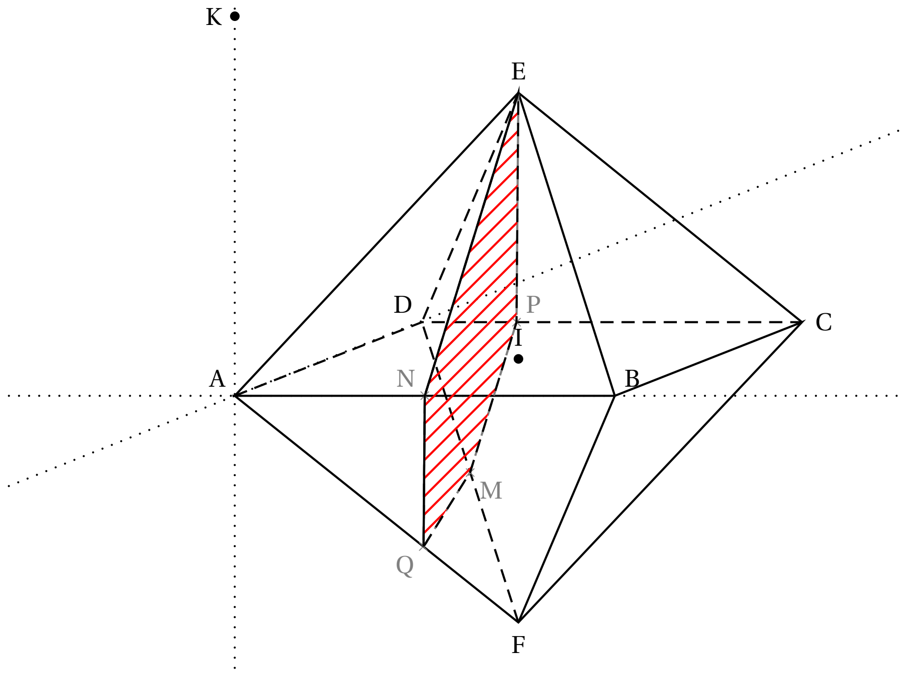
Or, on démontre assez rapidement que $\dfrac{u_{n+4}}{u_n} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \mathrm{i}^4 = \dfrac{1}{2^4}$ car $\mathrm{i}^4 = \left(\mathrm{i}^2\right)^2 = 1$.

Ici, on a même prouvé que $\overrightarrow{\mathrm{AM}_{n+4}} = \dfrac{1}{2^4} \times \overrightarrow{\mathrm{AM}_n}$, ce qui donne des informations supplémentaires concernant les positions relatives de ces points.

Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 1



Exercice 3