Correction du baccalauréat S Métropole juin 2002

EXERCICE 1 **4 points**

Commun tous les candidats

1. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement leur produit scalaire (le repère est orthonormal) est nul. D'où $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V} = 0 \iff a(1+b) - 5 + b(1-a) = 0 \iff a + b - 5 = 0 \iff \boldsymbol{a+b=5}$.

   Les tirages $(a\,;\,b)$ favorables sont : $(1\,;4)$, $(2\,;3)$, $(3\,;2)$, et $(4\,;1)$ sur 4×4 tirages possibles.

   $p\left(\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}\right)$ orthogonaux $\iff \dfrac{4}{16} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$.

2. **a.** D'après la question **1.** A et B ont chacun 1 chance sur 4 d'obtenir des vecteurs orthogonaux et donc 3 chances sur 4 de ne pas obtenir des vecteurs orthogonaux.

   Au premier jeu on a donc si A obtient une somme égale à 5 et B non (ou le contraire), $p(\mathrm{A}_1) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{16} = p(\mathrm{B}_1)$.

   D'après la loi des probabilités totales, on a $p(\mathrm{A}_1) + p(\mathrm{B}_1) + p(\mathrm{C}_1) = 1 \iff p(\mathrm{C}_1) = 1 - \dfrac{6}{16} = \dfrac{10}{16}$ $\left(\text{ou encore } p(\mathrm{C}_1) = \dfrac{5}{8}\right)$.

   b. À chaque nouveau jeu les probabilités de gagner pour A, gagner pour B et rejouer sont respectivement $\dfrac{3}{16}$, $\dfrac{3}{16}$ et $\dfrac{10}{16}$.

   On a donc $p(\mathrm{C}_{n+1}) = p(C_n) = \dfrac{10}{16}$. On reconnait une suite géométrique de raison $\dfrac{10}{16}$. On a donc $p(\mathrm{C}_n) = \left(\dfrac{10}{16}\right)^n = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n$.

   De même $p(\mathrm{A}_{n+1}) = p(C_n) \times \dfrac{3}{16} = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n \times \dfrac{3}{16}$, soit en décalant l'indice de 1 : $p(\mathrm{A}_n) = \dfrac{3}{16} \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3. On a $-1 < \dfrac{5}{8} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p(\mathrm{A}_n) = 0$.

   $p(\mathrm{A}_n) < 0,01 \iff \dfrac{3}{16} \times \left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1} < 10^{-2} \iff \ln\dfrac{3}{16} + (n-1)\ln\dfrac{5}{8} < -2\ln 10 \iff$

   $n - 1 \geqslant \dfrac{-2\ln 10 - \ln\dfrac{3}{16}}{\ln\dfrac{5}{8}}$ (ATTENTION : $\dfrac{5}{8} < 1$, donc $\ln\dfrac{5}{8} < 0$, l'ordre CHANGE) $\approx 6,2 \iff n > 7,2$.

   Conclusion le plus petit naturel est $n = 8$. (la calculatrice donne bien pour $n = 7$ une probabilité de $0,011$ et pour $n = 8$ une probabilité de $0,006\,98$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$. $\Delta = 12 - 16 = -4 = (2\mathrm{i})^2$. D'où les deux solutions qui sont justement $a = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $b = \overline{a} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

   On a $|a|^2 = |b|^2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$. Donc $|a| = 2$. En factorisant 2, on a $a = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. b est le conjugué de a, donc $b = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

2. a. Effectuer la rotation r revient à multiplier l'affixe du point A par $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$. On a donc $a' = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}} \times \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = 2\text{i}$.

 b. Par définition de l'homothétie on a : $\overrightarrow{\text{OB}'} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\text{OB}}$ soit en termes d'affixes $b' = -\dfrac{3}{2}b = -\dfrac{3}{2} \times 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}} = -3\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

 On a $-3 = 3 \times (-1) = 3 \times \text{e}^{\text{i}\pi}$. Donc $b' = 3\text{e}^{\text{i}\pi} \times \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}} = 3\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.

 Le module de b' est donc égal à 3 et B$'$ est aligné avec O et B.

3. a. Si C a pour affixe $z_{\text{C}} = c$, on a $|c| = \text{OC} = \text{R}$. Or si $c = x + y$, alors $c\overline{c} = (x + \text{i}y)(x - \text{i}y) = x^2 + y^2 = |c|^2 = \text{R}^2$.

 $(c - 2\text{i})\left(\overline{c} + 2\text{i}\right) = \left(c - a'\right)\left(\overline{c} - \overline{c}'\right) = \left(c - a'\right)\left(\overline{c - a'}\right)$.

 Or on sait d'après le premier calcul que le produit de deux complexes conjugués est égal au carré de leur norme. Or $(c-2\text{i})\left(\overline{c} + 2\text{i}\right) = (c-2\text{i})\left(\overline{c - 2\text{i}}\right) = |c - 2\text{i}|^2 = \left|\overrightarrow{\text{A}'\text{C}}\right|^2 = \text{A}'\text{C}^2 = R^2$.

 (A$'$ est un point du cercle de centre C !)

 De même $\left(c + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\text{i}\right)\left(\overline{c} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}\right) = \left(c - b'\right)\left(\overline{c} - \overline{b'}\right) = \left(c - b'\right)\left(\overline{c - b'}\right) = \left|c - b'\right|^2 = |\overrightarrow{\text{B}'\text{C}}|^2 = \text{B}'\text{C}^2 = R^2$.

 (B$'$ est un point du cercle de centre C !)

 b. En développant la deuxième égalité ci-dessus, on obtient :

 $\text{R}^2 + 2\text{i}(c - \overline{c}) + 4 = \text{R}^2 \iff c - \overline{c} = -\dfrac{2}{\text{i}} = 2\text{i}$.

 En développant la troisième $\text{R}^2 = c\overline{c} + \dfrac{3}{2}(c - \overline{c}) + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(c + \overline{c}\right) + \dfrac{27}{4} + \dfrac{9}{4} \iff \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(c + \overline{c}\right) = -6 \iff c + \overline{c} = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

 c. On a donc le système $\left\{\begin{array}{rcl} c - \overline{c} & = & 2\text{i} \\ c + \overline{c} & = & -\dfrac{4}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$ d'où par addition

 $2c = -\dfrac{4\sqrt{3}}{3} + 2\text{i}$ et enfin $c = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \text{i}$.

 Enfin $c\overline{c} = \text{R}^2 = \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} + \text{i}\right)\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3} - \text{i}\right) = \dfrac{12}{9} + 1 = \dfrac{21}{9}$. Donc $\text{R} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. $(-1\ ;\ 1)$ est une solution évidente de $6u + 7v = 1$. En multipliant chaque membre par 57 on a $6 \times (-57) + 7 \times 57 = 57$; $(-57\ ;\ 57)$ est donc une solution particulière de $6x + 7y = 57$.

 b. Soit $(x\ ;\ y)$ une solution particulière de $6x + 7y = 57$. On vient de voir que $6 \times (-57) + 7 \times 57 = 57$, d'où par soustraction membre à membre $6(x+57) + 7(y - 57) = 0 \iff 6(x + 57) = 7(57 - y)$ (1). 6 divise $6(x + 57)$ donc aussi $7(57 - y)$ mais est premier avec 7; donc d'après le théorème de Gauss, il divise $57 - y$; il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $57 - y = 6k \iff y = 57 - 6k$. En reportant dans (1) $6(x + 57) = 7 \times 6k \iff x + 57 = 7k \iff x = 7k - 57$.

 Conclusion : $\text{S} = \{(7k - 57\ ;\ 57 - 6k),\ k \in \mathbb{Z}\}$

2. Les points de P qui appartiennent au plan $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ vérifient la système

 $\left\{\begin{array}{lcl} 6x + 7y + 8z & = & 57 \\ z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow 6x + 7y = 57$ (E). D'après 1. b.

 $x = 7k - 57$ et $y = 57 - 6k$.

$x,\ y \in \mathbb{N} \Longrightarrow \begin{cases} 7k-57 & \geqslant & 0 \\ 57-6k & \geqslant & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & \geqslant & 9 \\ k & \leqslant & 9 \end{cases}$ Conclusion $k = 9$. Il existe donc un seul point du plan P de cote nulle, le point de coordonnées $(6\,;3\,;0)$

3. $x,\ y\ ,\ z \in \mathbb{N}$.

a. Si y est pair, $7y,\ 6x$ et $8z$ sont tous pairs et leur somme est paire, donc ne peut être égale à un impair : 57. Donc y est impair et s'écrit :

b. $y = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. l'équation devient $6x+7(2p+1)+8z = 57 \iff 6x+14p+8z = 50 \iff 3x+7p+4z = 25 \iff 3x+3p+4p+4z = 25 \iff 3(x+p)+4(p+z) = 25$. (2)

Dans la division euclidienne de $(p+z)$ par 3 on a : $\begin{cases} p+z & = & 3q+r \\ 0 & \leqslant & r<3 \end{cases}$

En reportant dans l'équation au-dessus on obtient :

$3(p+q)+12q+4r = 25 \iff 3(p+5q)+4r = 25$;

$r = 0$, donne $3(p+5q) = 25$ qui est impossible car 3 ne divise pas 25 ;

$r = 2$ donne $3(p+q) = 17$ qui est aussi impossible.

Conclusion $r = 1$.

c. On a donc $p+z = 3q+1$ avec $q \in \mathbb{N}$. l'équation (2) devient $3(x+p)+4(3q+1) = 25 \iff$

$3(x+p+5q) = 21 \iff x+p+5q = 7$. Or si $q > 2,\ 5q > 10$ (impossible). Donc $q = 0$ ou 1.

d. Finalement les triplets $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ avec $x,\ y,\ z \in \mathbb{N}$ qui vérifient l'équation $6x+7y+8z = 57$ vérifient :

$x = 7-p-4q,\ y = 2p+1,\ z = 3q+1-p$

Si $q = 0,\ x = 7-p,\ y = 2p+1,\ z = 1-p$; cette dernière écriture impose $p < 1$, soit p = 0 qui donne le triplet (7, 1, 1) soit p = 1 qui donne le triplet (6, 3, 0) (déjà trouvé).

Si $q = 1$, $x = 3-p$, $y = 2p+1$; $z = 4-p$. La première écriture impose $p \leqslant 3$, donc quatre solutions : soit $p = 0$, solution (3, 1, 4), soit $p = 1$, solution (2, 3, 3), soit $p = 2$, solution (1, 5, 2), soit $p = 3$ solution (0, 7, 1).

Il y a donc six points de P dont les cordonnées sont des naturels : (7, 1, 1), (6, 3, 0), (3, 1, 4), (2, 3, 3), (1, 5, 2), (0, 7, 1).

PROBLÈME 11 points
Commun à tous les candidats

Partie A

1. $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[x+(1-x)\mathrm{e}^{2x}\right]$

a. On a (croissance comparée) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{2x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$f(x) = \dfrac{1}{2}(x\mathrm{e}^{-2x}+1-x)$; la limite de $x\mathrm{e}^{-2x}$ en $+\infty$ est égale à 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-2x} = -\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. On calcule la différence $d(x) = f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{2x}$ et on a vu au **a)** que la limite de cette expression est égale à zéro au voisinage de $-\infty$. Ceci montre que la droite (Δ) est asymptote $(\mathscr{C})$ au voisinage de $-\infty$.

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0_+$. Conclusion $\lim\limits_{x\to-\infty} d(x) = 0_+$, ce qui signifie que $(\mathscr{C})$ reste au-dessus de son asymptote.

2. x, $(1-x)$ et e^{2x} sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f fonction obtenue par somme et produit de ces fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = \dfrac{1}{2}x + \left(\dfrac{1-x}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$; $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2x}\left(\dfrac{1-x}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}(1-2x) = \dfrac{1}{2}\left[1+(1-2x)\mathrm{e}^{2x}\right]$.

3. $u(x) = 1 + (1-2x)\mathrm{e}^{2x}$

a. $u'(x) - 2\mathrm{e}^{2x} + 2(1-x)\mathrm{e}^{2x} = -4x\mathrm{e}^{2x}$ qui est du signe de $-x$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$u'(x)$		$+$			$-$		
$u(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b. On a $u(0) = 1+1 = 2$ et $u(1) = 1-\mathrm{e} < 0$. Donc sur l'intervalle $[0 ; 1]$, la fonction u est : dérivable ; monotone décroissante ; $u(0) > 0$ et $u(1) < 0$.
Conclusion : il existe un réel unique α de l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $u(\alpha) = 0$.
La calculatrice livre : $u(0,63) \approx 0,08$ et $u(0,64) \approx -0,007$. Donc d'après le théorème ci-dessus $0,63 < \alpha < 0,64$. Réponse $\alpha \approx 0,64$ 10^{-2} près par excès.

c. Le tableau donne donc le signe de u : $x < \alpha \iff u(x) > 0$ et $x > \alpha \iff u(x) < 0$

4. On a $f'(x) = \dfrac{1}{2}u(x)$: le signe de f' est celui de u. On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$		$-\infty$

Partie B

1. On a $M_t\left(t ; \mathrm{e}^t\right)$; la tangente en M_t Γ a pour équation : $N(X ; Y) \in \Gamma \iff \dfrac{Y-\mathrm{e}^t}{X-t} = \left(\mathrm{e}^t\right)' = \mathrm{e}^t \iff Y = X\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t(1-t)$. Cette tangente coupe l'axe des ordonnées pour $X = 0$, d'o $Y = \mathrm{e}^t(1-t)$. Donc $N_t\left(0 ; \mathrm{e}^t(1-t)\right)$.

2. On a $P_t(t ; t)$. Par définition du barycentre $\overrightarrow{G_tM_t} + \overrightarrow{G_t\mathrm{O}} + \overrightarrow{G_tM_t} + \overrightarrow{G_tP_t} + \overrightarrow{G_tN_t} = \overrightarrow{0} \iff$ (avec la relation de Chasles) $\overrightarrow{\mathrm{O}G_t} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M_t} + \overrightarrow{\mathrm{O}P_t} + \overrightarrow{\mathrm{O}N_t}\right)$.

a. Pour $t = -2$ on obtient $\overrightarrow{\mathrm{O}G_{-2}} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M_{-2}} + \overrightarrow{\mathrm{O}P_{-2}} + \overrightarrow{\mathrm{O}N_{-2}}\right)$ soit avec les coordonnées des points M_{-2}, N_{-2}, P_{-2}, on obtient $G_{-2}\left(-1 ; \mathrm{e}^{-2} - \dfrac{1}{2}\right)$

b. Avec la relation obtenue au début du **2.** on obtient de même
$G_t\left[\dfrac{t}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\left(2\mathrm{e}^t+t-t\mathrm{e}^t\right)\right]$

3. En posant $\dfrac{t}{2}=x \iff t=2x$, on obtient $y=\dfrac{1}{2}\left(2\mathrm{e}^{2x}+2x-2x\mathrm{e}^{2x}\right)$ soit $y=f(x)$. Conclusion : tous les barycentres appartiennent la courbe $(\mathscr{C})$, et comme $t\in\mathbb{R}$ les barycentres parcourent toute cette courbe.

Partie C

1. cf. plus bas

2. Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, $1-x\geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{2x}>0$, donc $d(x)=\dfrac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{2x}\geqslant 0$, donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.
On a donc
$$\mathscr{A}=\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$$
En posant : $\left\{\begin{array}{lllllll} u & = & (1-x) & \quad & v' & = & \mathrm{e}^{2x}\\ u' & = & -1 & & v & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\end{array}\right.$
Donc $\mathscr{A}=\dfrac{1}{2}\left[(1-x)\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x=\left[(1-x)\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4}+\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{8}\right]_0^1=\dfrac{\mathrm{e}^2}{8}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{\mathrm{e}^2-3}{8}$ u.a. Or l'unité d'aire vaut $2\times 2=4$ cm^2. Donc $\mathscr{A}=\dfrac{\mathrm{e}^2-3}{8}\times 4=\dfrac{\mathrm{e}^2-3}{2}$ cm^2.

Annexe problème