Corrigé du baccalauréat STAV Nouvelle Calédonie novembre 2019

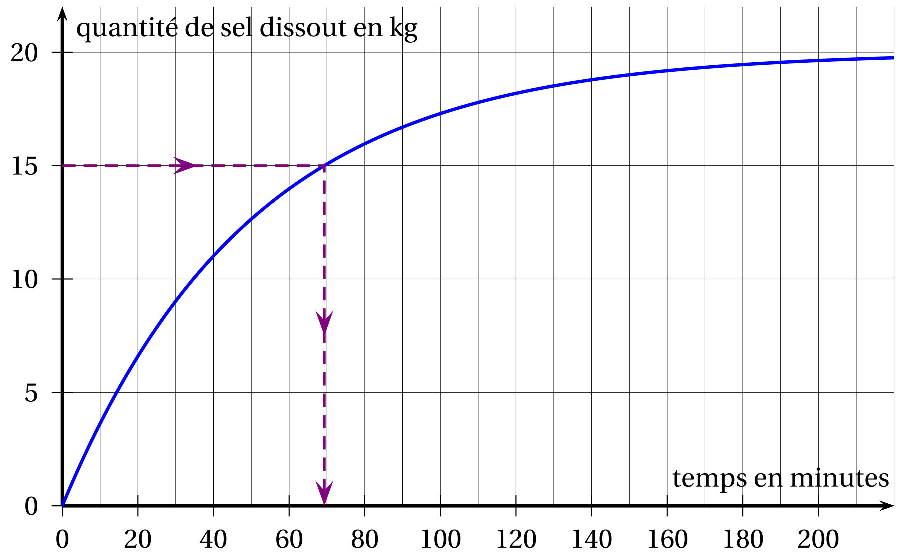
La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **7 points**

Lorsqu'on place une substance solide (comme le sel) dans l'eau, la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, à tout instant.
On place 20 kg de sel dans un grand récipient d'eau à l'instant $t = 0$ et on note $f(t)$ la quantité dissoute (en kg) à l'instant t (en min).
On admet que f est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = -20\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 20.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal, donnée ci-dessous :



1. À l'aide du graphique, nous pouvons émettre l'hypothèse que la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et que sa limite en $+\infty$ est 20.
2. **a.** Calculons la limite de f en $+\infty$.
   Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0,02t = -\infty$, on sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,02t} = 0$ et aussi $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 20\,\mathrm{e}^{-0,02t} = 0$.
   Donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} -20\,\mathrm{e}^{-0,02t} + \lim_{t\to+\infty} 20 = 20$.
   Donnons une interprétation de ce résultat mathématiquement. La droite d'équation $y = 20$ est une asymptote, au voisinage de l'infini, à la courbe représentative de f. Dans le contexte de l'exercice, toute la quantité de sel tend à se dissoudre dans le grand récipient d'eau.

   b. Déterminons $f'(t)$ pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = -20 \times (-0,02)\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 0 = 0,4\,\mathrm{e}^{-0,02t}$.
   Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) > 0$ car sur $[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-0,02t} > 0$.

   c. Dressons le tableau de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Sur $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
variations de f	0 ↗	20

3. On voudrait déterminer au bout de combien de temps 15 kg de sel seront dissouts.

a. Déterminons une valeur approchée de ce moment par la méthode graphique.

Traçons la droite d'équation $y = 15$ et lisons l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe. Nous lisons environ 70.

Au bout d'environ 70 minutes, 15 kg de sel auront été dissouts.

b. Résolvons l'équation $-20\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 20 = 15$

$$\begin{aligned}
-20\,\mathrm{e}^{-0,02t} + 20 &= 15\\
-20\,\mathrm{e}^{-0,02t} &= -5\\
\mathrm{e}^{-0,02t} &= \frac{5}{20}\\
\mathrm{e}^{-0,02t} &= \frac{1}{4}\\
-0,02t &= \ln\left(\frac{1}{4}\right) \qquad \text{or } \ln\frac{1}{4} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\ln\frac{1}{2} = -2\ln 2\\
-0,02t &= -2\ln(2)\\
t &= \frac{-2\ln(2)}{-0,02}\\
t &= 100\ln(2)\\
t &\approx 69,31
\end{aligned}$$

Il ne restera que 5 kg de sel à dissoudre au bout de $100\ln(2)$ minutes soit environ 70 minutes, valeur approchée arrondie à l'unité près.

4. On pose $Q = \dfrac{1}{120}\displaystyle\int_0^{120} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q représente la quantité de sel moyenne dissoute sur les 2 premières heures de l'expérience.

Calculons la valeur exacte de Q

$Q = \dfrac{1}{120}\displaystyle\int_0^{120} f(t)\,\mathrm{d}t$

$Q = \dfrac{1}{120}\displaystyle\int_0^{120} -20\,\mathrm{e}^{-0,02t}\,\mathrm{d}t + \dfrac{1}{120}\displaystyle\int_0^{120} 20\,\mathrm{d}t.$

$Q = \left[\dfrac{1}{120} \times -20 \times \dfrac{-1}{0,02}\,\mathrm{e}^{-0,02t}\right]_0^{120} + \left[\dfrac{1}{120} \times 20t\right]_0^{120} = \left[\dfrac{25}{3}\,\mathrm{e}^{-0,02t}\right]_0^{120} + \left[\dfrac{1}{6}t\right]_0^{120}$

$Q = \dfrac{25}{3}\left(\mathrm{e}^{-2,4} - 1\right) + \dfrac{1}{6}(120 - 0) = \dfrac{25}{3}\left(\mathrm{e}^{-2,4} - 1\right) + 20 \approx 12,4226.$

Sa valeur approchée arrondie au gramme près est 12,423.

EXERCICE 2 — 6 points

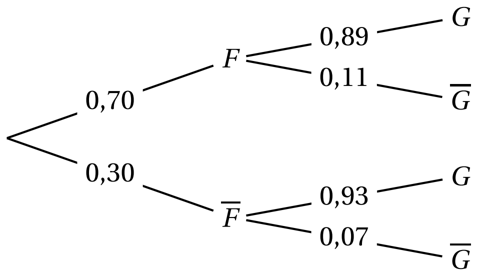
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.
Une jardinerie vend des lots de graminées pour gazon.

Partie A : faculté germinative

Ces lots contiennent 70 % de fétuque rouge et le reste de ray-grass.
La faculté germinative est de : 89 % pour la fétuque rouge et 93 % pour le ray-grass.
On considère les évènements suivants :

- F : « la graine est une graine de fétuque rouge »
- G : « la graine germe ».

1. Traduisons les données de l'énoncé sous forme d'un arbre de probabilités.



2. La probabilité qu'une graine de fétuque rouge germe est notée $P(F \cap G)$.
   $P(F \cap G) = P(F) \times P_F(G) = 0{,}70 \times 0{,}89 = 0{,}623$
3. La probabilité qu'une graine du mélange pour gazon germe est notée $P(G)$.
   F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers.
   $P(G) = P(F \cap G) + P\left(\overline{F} \cap G\right) = 0{,}623 + 0{,}30 \times 0{,}93 = 0{,}623 + 0{,}279 = 0{,}902$. (soit plus de 90 %)

Partie B : pureté spécifique

Sur l'étiquette des lots, il est indiqué que 97 % des lots ne contiennent aucune graine de rumex (mauvaise herbe de la même famille que l'oseille). La jardinerie fait une commande de 500 lots de mélange pour gazon. On note X, la variable aléatoire égale aux nombres de lots de semences contenant du rumex.

1. Justifions que la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,03$.
   X est distribuée selon la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0{,}03$ puisque il y a répétition de 500 tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues soit le lot contient du rumex avec une probabilité $p = 1 - 0,97 = 0,03$ soit le lot ne contient pas de rumex de probabilité $q = 0{,}97$. Par conséquent, $P(X = k) = \binom{500}{k}(0{,}03)^k(0{,}97)^{500-k}$.
2. Dans une telle commande, en moyenne le nombre de lots contenant du rumex est
   $E(X) = np = 500 \times 0{,}03 = 15$.
3. La probabilité d'avoir plus de 10 lots avec du rumex dans la commande est notée $P(X \geqslant 10)$ en considérant « plus de » au sens large c'est-à-dire 10 ou strictement plus de 10.
   $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) = 1 - 0{,}067 = 0{,}933$.
   On pourra utiliser la calculatrice ou le tableau ci-dessous.

a	8	9	10	11	12
$P(X \leqslant a)$	0,035	0,067	0,115	0,181	0,264

EXERCICE 3 **3 points**

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante en justifiant votre choix.

Dans une usine, une machine fabrique des tiges métalliques destinées à des pulvérisateurs. L'ingénieur chargé du réglage affirme que les tiges fabriquées présentent un défaut dans 2 % des cas.
On s'intéresse à un échantillon de 300 tiges prélevées au hasard dans le stock. On suppose que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ces tirages à des tirages au sort avec remise.

1. À 10^{-3} près, un intervalle de fluctuation asymptotique à 0, 95 de la fréquence des tiges avec défaut sur l'échantillon est :
   a. $\cancel{[0{,}011\,;\,0{,}029]}$
   b. $\boxed{[0{,}004\,;\,0{,}036\,]}$
   c. $\cancel{[0\,;\,0{,}95]}$
2. Un ouvrier trouve 8 tiges défectueuses dans l'échantillon.

a. ~~Au seuil de risque de 5 %, il peut remettre en cause l'hypothèse de l'ingénieur.~~

b. $\boxed{\text{Au seuil de risque de 5 %, il ne peut pas remettre en cause l'hypothèse de l'ingénieur.}}$

c. ~~Il faut recommencer l'expérience.~~

3. Cette question est indépendante des deux premières. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	U, N
Initialisation :	Affecter à U la valeur 120
Traitement :	Pour N allant de 1 à 6
	Affecter à U la valeur $U \times 0,95$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher U

À 10^{-2} près par excès, la valeur affichée en sortie est égale à :

a. ~~92,85~~

b. ~~114,30~~

c. $\boxed{88{,}21}$

EXERCICE 4 **4 points**

Dans le cadre d'un test sur la résistance d'une plante à la radioactivité, on observe l'évolution de la durée de floraison de plantes soumises à de la radioactivité par rapport à la durée habituelle de floraison sans radioactivité.
On appelle Gain le nombre de jours gagnés ou perdus sur la durée de floraison habituelle. Lorsqu'il y a une diminution de la durée par rapport à la floraison habituelle, on note négativement ce gain.
Par exemple, un Gain de -3 veut dire que la plante soumise à la radioactivité a eu une floraison avec 3 jours de moins que la floraison habituelle.
On obtient les résultats suivants :

Gain	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Effectif	4	7	13	21	28	31	30	23	15	10	6	3	2

1. a. Le nombre de plantes qui ont gagné deux jours de floraison est $G(2)$ soit 6.

b. Calculons la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ de cette série statistique arrondis à 10^{-2} près.
Calculons la moyenne :
$\overline{x} = \dfrac{(-3)\times 4 + (-2,5)\times 7 + \cdots + 2,5 \times 3 + 3 \times 2}{4 + 7 + \cdots + 3 + 2} \approx -0,33.$
À l'aide de la calculatrice, calculons l'écart type, nous trouvons $\sigma \approx 1,24$.

c. Calculons le pourcentage des plantes dont le Gain est dans l'intervalle

$$\left[\overline{x} - 2\sigma\ ;\ \overline{x} + 2\sigma\right] = [-2,81\ ;\ 2,15].$$

Il y a 184 plantes dans l'intervalle sur un total de 193 soit $\dfrac{184}{193} \approx 0{,}9533$ c'est-à-dire environ 95 %.

2. On note Y le Gain en jours de la durée de floraison d'une plante choisie au hasard.
En admettant que l'on peut modéliser la loi de Y par une loi normale d'espérance $-0,3$ et d'écart-type $1,2$, la probabilité que la durée de floraison de la plante augmente d'au moins deux jours est $P(Y \leqslant -2)$.
D'après le tableau ci-dessous la probabilité que la plante ait gagné deux jours de floraison est 0,078 3.
On pourra utiliser la calculatrice ou le tableau ci-dessous.

a	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(Y \leqslant a)$	0,012 2	0,078 3	0,279 8	0,598 7	0,860 7	0,972 4	0,997 0