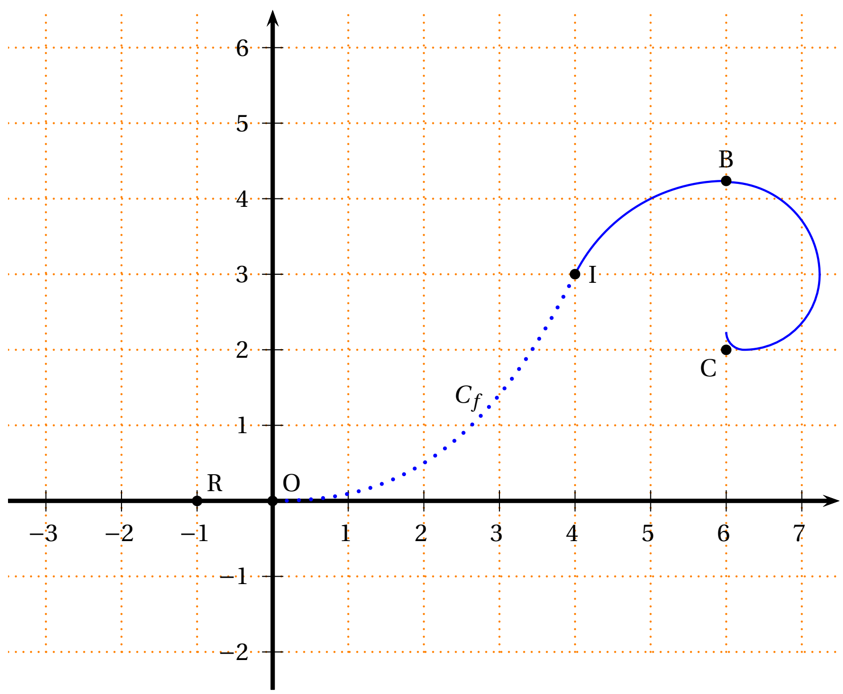
Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STD2A
Antilles-Guyane 12 septembre 2013

EXERCICE 1 **5 points**

1. Les côtés [BC] et [FG] sont opposés dans le rectangle BCGF : les droites (BC) et (FG) sont donc parallèles ; leurs images dans la perspective (bc) et (fg) sont donc sécantes sur la ligne d'horizon en w point de fuite principal.
2.
3. Voir l'annexe.
4. Voir l'annexe.

EXERCICE 2 **7 points**



1. • C_f a une tangente en O, donc O appartient à C_f et donc $f(0) = 0$;
   • La tangente en O est horizontale, donc $f'(0) = 0$.
2. **a.** On a $\overrightarrow{IA}(1 ; 2)$ et $\overrightarrow{IC}(2 ; -1)$, d'où $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = 2 - 2 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (IA) et (IC) sont perpendiculaires. Donc la perpendiculaire en I au rayon [CI] est la tangente au cercle de centre C de rayon [CI], c'est-à-dire la tangente (T).

   b. Le coefficient directeur de (T) est $\dfrac{2}{1} = 2$.

   c. – I appartient à C_f, donc $f(4) = 3$;
   –Le nombre dérivé $f'(4)$ est égal au coefficient directeur de la tangent e T soit $f'(4) = 2$.
3. **a.** De $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ on déduit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

   b. – $f(0) = 0 \iff d = 0$;
   –$f'(0) = 0 \iff c = 0$.

c.

$$f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{1}{16}x^2.$$

On a bien avec $f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{1}{8}x$:

- $f(0) = 0$;
- $f'(0) = 0$;
- $f(4) = \frac{1}{32} \times 64 + \frac{1}{16} \times 16 = 2 + 1 = 3$;
- $f'(4) = \frac{3}{32} \times 16 + \frac{1}{8} \times 4 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$

4. $f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{1}{8}x = \frac{3}{32}x^2 + \frac{4}{32}x = \frac{3x^2 + 4x}{32} = \frac{x(3x+4)}{32}.$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui du trinôme $x(3x+4)$. Il est positif sauf entre les racines $-\frac{4}{3}$ et 0.

Donc $f'(0) = 0$ (tangente horizontale et $f'(x) > 0$ sur $]0\,;\,4]$.

La fonction est donc strictement croissante sur $]0\,;\,4]$ de $f(0) = 0$ à $f(4) = 3$.

EXERCICE 3 **8 points**

Partie A : Construction d'une ellipse par la méthode du « jardinier ».

1. a. On a $\ell = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$.

b. Si M est en G : $\ell = \mathrm{AG} + \mathrm{GB} \iff \mathrm{GB} = \ell - \mathrm{AG}$;

Si M est en E : $\ell = \mathrm{AE} + \mathrm{EB} \iff \mathrm{AE} = \ell - \mathrm{EB}$.

Comme $\mathrm{AE} = \mathrm{GB}$ on en déduit $\ell - \mathrm{AG} = \ell - \mathrm{EB} \iff \mathrm{AG} = \mathrm{EB}$.

On a donc $\ell = \mathrm{AG} + \mathrm{GB} = \mathrm{EB} + \mathrm{GB} = \mathrm{GE} = 15$ (m).

2. a. Si M est en F : $\mathrm{AF} + \mathrm{FB} = \ell = 15$. Comme AFB est un triangle isocèle en F ((FO) est la médiatrice de [GF]), on a $\mathrm{AF} = \mathrm{FB}$, donc $\mathrm{AF} = 7{,}5$ (m).

b. on a $\mathrm{OF} = \frac{\mathrm{FH}}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

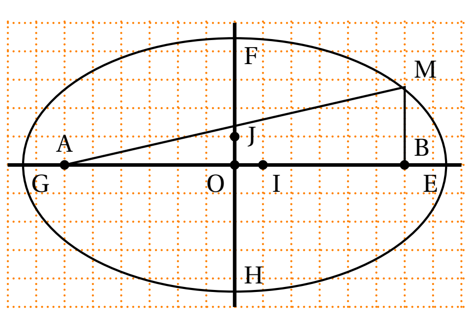
Dans le triangle AOF rectangle en O le théorème de Pythagore s'écrit :

$\mathrm{AF}^2 = \mathrm{AO}^2 + \mathrm{OF}^2 \iff 7{,}5^2 = \mathrm{AO}^2 + 4{,}5^2 \iff \mathrm{AO}^2 = 7{,}5^2 - 4{,}5^2 = (7{,}5 + 4{,}5)(7{,}5 - 4{,}5) = 12 \times 3 = 36 = 6^2$.

Conclusion $\mathrm{OA} = 6$ (m).

c. L'écartement entre les deux piquets A et B est égal à $\mathrm{OA} + \mathrm{OB} = 6 + 6 = 12$ (m).

3. L'ellipse est tracée dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OI}},\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$.



a. On lit A$(-6\,;\,0)$, B$(6\,;\,0)$, E$(7{,}5\,;\,0)$, F$(0\,;\,4{,}5)$.

b. On sait qu'une équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{7{,}5^2} + \frac{y^2}{4{,}5^2} = 1$.

Il semble que M soit un point de l'ellipse.

c. M(6; 2,7) appartient à l'ellipse si :

$\frac{6^2}{7{,}5^2} + \frac{2{,}7^2}{4{,}5^2} = 1 \iff \left(\frac{2}{2{,}5}\right)^2 + \left(\frac{0{,}3}{0{,}5}\right)^2 = 1 \iff \left(\frac{8}{10}\right)^2 + 0{,}6^2 = 1 \iff 0{,}64 + 0{,}36 = 1$: cette égalité est vraie. M est un un point de l'ellipse.

Partie B : Construction de cette ellipse à partir d'un cercle.

1. On a $\text{ON}^2 = (7,5\cos t)^2 + (7,5\sin t)^2 = 7,5\cos^2 t + 7,5^2\sin^2 t = 7,5^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 7,5^2$.

   Conclusion $\text{ON} = 7,5$; N appartient au cercle C de centre O et de rayon 7,5.

2. **a.** On a $\text{K}(7,5\cos t\ ;\ 0)$.

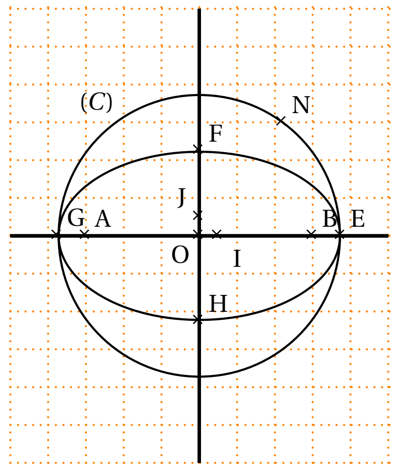
   On en déduit que $\overrightarrow{\text{KN}}\begin{pmatrix}7,5\cos t - 7,5\cos t\\ 7,5\sin t - 0\end{pmatrix}$.

   Donc $\overrightarrow{\text{KN}}\begin{pmatrix}0\\ 7,5\sin t\end{pmatrix}$ et donc

   $\overrightarrow{\text{KP}} = 0,6\overrightarrow{\text{KN}}\begin{pmatrix}0\\ 4,5\sin t\end{pmatrix}$

   b. L'abscisse de P est celle de N soit $7,5\cos t$ et son ordonnée est $4,5\sin(t)$.

   c. P appartient à l'ellipse si :
   $\dfrac{(7,5\cos t)^2}{7,5^2} + \dfrac{(4,5\sin t)^2}{4,5^2} = 1 \iff (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$ qui est une égalité vraie.



Document Annexe - À rendre avec la copie