Baccalauréat STG - Mercatique - CFE - GSI
Antilles-Guyane 20 juin 2011
Corrrection

EXERCICE 1 **5 points**

On étudie l'évolution du montant brut horaire du SMIC au 1er janvier de chaque année, à partir de 2002. On note x_i le rang de l'année $(2002+i)$ où i est un entier naturel. On obtient les résultats suivants :

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Montant du SMIC horaire en euros (y_i)	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,86

(*Source : INSEE*)

1. **a.** Le taux d'évolution exprimé en pourcentage, du montant brut horaire du SMIC entre le 1er janvier 2002 et le 1er janvier 2010 est :

$$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} = \frac{8,86-6,67}{6,67} = \boxed{32,8\ \%}$$

   b. Déterminons le taux moyen annuel d'évolution, exprimé en pourcentage, du montant brut horaire du SMIC entre le 1er janvier 2002 et le 1er janvier 2010. Durant cette période le montant brut horaire du SMIC a subi 8 évolutions. Si t_m est le taux d'évolution, nous pouvons dire que le montant brut horaire a été multiplié par $(1+t_m)^8$. Le taux moyen est alors : $t_m = 1,328^{\frac{1}{8}} - 1 = \boxed{3,6\ \%}$

2. **a.** Le nuage de points est tracé à la fin de la correction

   b. Les coordonnées du point moyen G du nuage a pour abscisse la moyenne des abscisses et pour ordonnée la moyenne des ordonnées des points G(4 ; 7,85)

3. **a.** À l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x, par la méthode des moindres carrés, est $y = 0,29x + 6,67$.

   Cette droite est tracée dans le repère précédent.

   b. Calculons le montant brut horaire du SMIC que ce modèle laisse prévoir pour le 1er janvier 2014.

   Le rang de 2014 est 12. La valeur de y pour $x = 12$ appartenant à la droite de régression de y en x est $0,29 \times 12 + 6,67 = 10,08$.

EXERCICE 2 **4 points**

Une entreprise de téléphonie fixe propose différentes options à ses clients, combinant téléphone illimité ou non, Internet illimité ou non.

On sait que $\frac{3}{5}$ de ses clients choisissent l'accès à Internet illimité. Parmi ceux-ci, 9 clients sur 10 prennent également le téléphone illimité.

Parmi les clients qui ne choisissent pas l'accès à Internet illimité, seuls 3 clients sur 10 demandent le téléphone illimité.

On choisit au hasard la fiche d'un client. On appelle P la probabilité associée à cette expérience aléatoire.

On note :

I l'événement : « ce client a choisi l'accès à Internet illimité »,

T l'événement : « ce client a choisi l'accès au téléphone illimité ». On note $\overline{\text{I}}$ l'événement contraire de l'événement I et $\overline{\text{T}}$ l'événement contraire de l'événement T.

1. L'arbre pondéré est complété en annexe.

2. **a.** $\text{I} \cap \overline{\text{T}}$ est l'événement « ce client a choisi l'accès à Internet illimité et n'a pas choisi le téléphone illimité ».

   $\text{I} \cup \text{T}$ est l'événement « ce client a choisi l'accès à Internet illimité ou a choisi le téléphone illimité ».

   b. La probabilité qu'un client ait choisi l'accès à Internet illimité et le téléphone illimité est notée $P(\text{I} \cap \text{T})$

   $P(\text{I} \cap \text{T}) = P(\text{I})P_{\text{T}}(\text{I}) = 0,6 \times 0,9 = 0,54$

   c. La probabilité $P\left(\overline{\text{I}} \cap \text{T}\right)$ est : $P(\overline{\text{I}} \cap \text{T}) = P(\overline{\text{I}})P_{\overline{\text{I}}}(\text{T}) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$

   d. Calculons la probabilité P(T) de l'événement T.

$$P(\text{T}) = P(\text{I} \cap \text{T}) + P(\overline{\text{I}} \cap \text{T}) \qquad P(\text{T}) = 0,54 + 0,12 = 0,66$$

3. Calculons la probabilité que le client n'ait pas l'accès à Internet illimité sachant qu'il a le téléphone illimité. Cette probabilité s'écrit $P_T(\bar{I})$.

$$P_T(\bar{I}) = \frac{P(\bar{I} \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}12}{0{,}66} = 0{,}18$$

EXERCICE 3 **6 points**

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[2\,;30]$ par :

$$C(x) = 12x + 22 - 25\ln(x).$$

Une usine de composants électroniques fabrique des haut-parleurs.
Le coût de production, en milliers d'euros, de x centaines de haut-parleurs est égal à $C(x)$; x est compris entre 2 et 30.

1. Sachant qu'une centaine de haut-parleurs est vendue 10 milliers d'euros, le prix de vente de x centaines de haut-parleurs (en milliers d'euros)est $10x$.

   On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[2\,;30]$ par

$$B(x) = -2x - 22 + 25\ln(x).$$

2. Le bénéfice, $b(x)$ en milliers d'euros, réalisé sur la vente de x centaines de haut-parleurs est égal à la différence entre les recettes et le coût de x centaines de haut-parleurs :

$$b(x) = R(x) - C(x) = 10x - (12x + 22 - 25\ \ln(x)) = -2x - 22 + 25\ \ln(x) = B(x)$$

3. On admet que B est dérivable sur l'intervalle $[2\,;30]$. On note B' sa fonction dérivée.
   a. Calculons $B'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;30]$,

$$B'(x) = -2 + 25\frac{1}{x} = \frac{-2x + 25}{x}$$

   On trouve bien ce qui était démandé.
   b. Étudions le signe de $B'(x)$. Puisque $x \in [2\ ;\ 30]$ le signe de $B'(x)$ est celui de $25 - 2x$
   $25 - 2x > 0 \iff x < 12{,}5$ d'où
   - si $x \in [2\ ;\ 12{,}5[,\quad B'(x) > 0$
   - si$x = 12{,}5 \quad B'(x) = 0$
   - si $x \in]12{,}5\ ;\ 30],\quad B'(x) < 0$

   c. Construisons le tableau de variation de la fonction B.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, f est croissante sur I. Pour $x \in [2\ ;\ 12{,}5]$ $B'(x) \geqslant 0$ donc B est croissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, f est décroissante sur I. Pour $x \in [12{,}5\ ;\ 30]$ $B'(x) \leqslant 0$ donc B est décroisssante sur cet intervalle.

x	2		12,5		30
$B'(x)$		+	0	−	
variation de B	$\approx -8{,}67$	↗	$\approx 16{,}14$	↘	$\approx 3{,}03$

   d. La quantité de haut-parleurs vendue pour laquelle le bénéfice est maximal est, en lisant le tableau de variations 12,5 centaines de haut-parleurs.

4. **a.** Voir le tableau de valeurs donné en annexe.
   b. Voir le tracé dans le repère fourni en annexe la courbe représentative de la fonction B.

5. Graphiquement, le bénéfice est supérieur à 10 000 € ou à 10 en milliers d'euros, lorsque la courbe est située « au dessus » de la droite d'équation $y = 10$. On trace celle-ci et on lit $x \in [\alpha\ ;\ \beta]$ où $\alpha \in [5{,}5\ ;\ 6]$ et $\beta \in [23\ ;\ 23{,}5]$. Entre α et β le bénéfice est supérieur à 10 000 euros.

EXERCICE 4 **5 points**

Un institut démographique étudie les populations respectives de deux villes A et B.

Partie 1

La ville A compte une population de 34 000 habitants en 2007. On observe depuis que chaque année, sa population augmente de 3 %.
On note $u_0 = 34000$ le nombre d'habitants de la ville A au 1er janvier 2007, et u_n le nombre de ses habitants au 1er janvier de l'année $(2007 + n)$.

1. Vérifions que $u_1 = 35020$. Puisque la population augmente de 3 %, le coefficient multiplicateur associé est 1,03 $u_1 = 34000 \times 1,03 = 35020$. Calculons u_2. $u_2 = 35020 \times 1,03 \approx 36071$

- **a.** Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,03u_n$.
- **b.** La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,03 car on passe d'un terme au suivant en le multipliant par 1,03. Le premier terme est 34 000.
- **c.** Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0q^n$. Ici nous avons $u_n = 34000 \times (1,03)^n$.

2. Selon ce modèle :

- **a.** Calculons la population de la ville A au 1er janvier 2012. en 2012,$n = 5$, $u_5 = 34000 \times 1,03^5 \approx 39415$
- **b.** À partir de 2021 la population de la ville A dépassera les 50 000 habitants car en 2020 $n = 13$ et $u_{13} = 34000 \times 1,03^{13} \approx 49930$, $u_{14} = 34000 \times 1,03^{14} \approx 51428$.

Partie II

La ville B, qui comptait 45 000 habitants au 1er janvier 2007, perd chaque année 500 habitants.
On note v_0 le nombre d'habitants de la ville B au 1er janvier 2007, et v_n le nombre d'habitants au 1er janvier de l'année $(2007 + n)$.
On a ainsi $v_0 = 45000$.

1. $v_1 = 45000 - 500 = 44500$. Calculons v_2. $v_2 = 44500 - 500 = 44000$

2.
- **a.** Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n - 500\cdot$
- **b.** La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison -500 et de premier terme 45 000, car on passe d'un terme au suivant en lui ajoutant un même nombre -500.
- **c.** Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r est $u_n = u_0 + nr$ d'où $v_n = 45000 - 500n$.

3. $v_5 = 45000 - 5 \times 500 = 42500$. Selon ce modèle, la population de la ville B au 1er janvier 2012 sera de 42 500 habitants.

Partie III

On rappelle que la population de la ville A augmente chaque année de 3 % et que la ville B perd chaque année 500 habitants.
On donne, ci-dessous, un extrait d'une feuille de calcul :

	A	B	C
1	n	Ville A	Ville B
2	0	34 000	45 000
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		

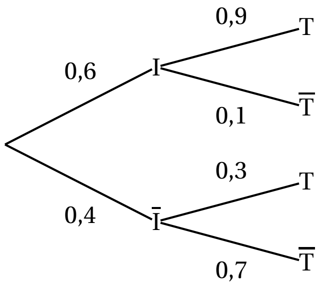
1.
- **a.** La formule qu'il faut entrer dans la cellule B3 est `= B2*1.03`.
- **b.** La formule qu'il faut entrer dans la cellule C3 est `=C2-500`

2. À partir 2014, la population de la ville A sera supérieure à celle de la ville B car $u_7 = 34000(1,03)^7 \approx 41816$ et $v_7 = 45000 - 7 \times 500 = 41500$

ANNEXE

À rendre avec la copie

Exercice 1

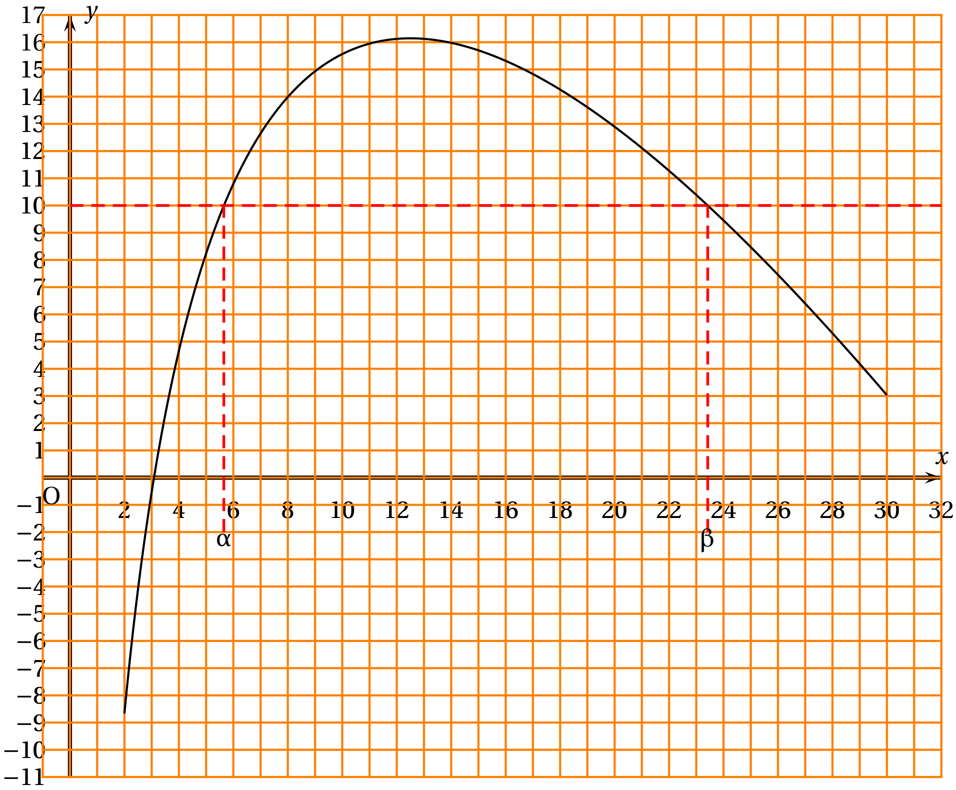


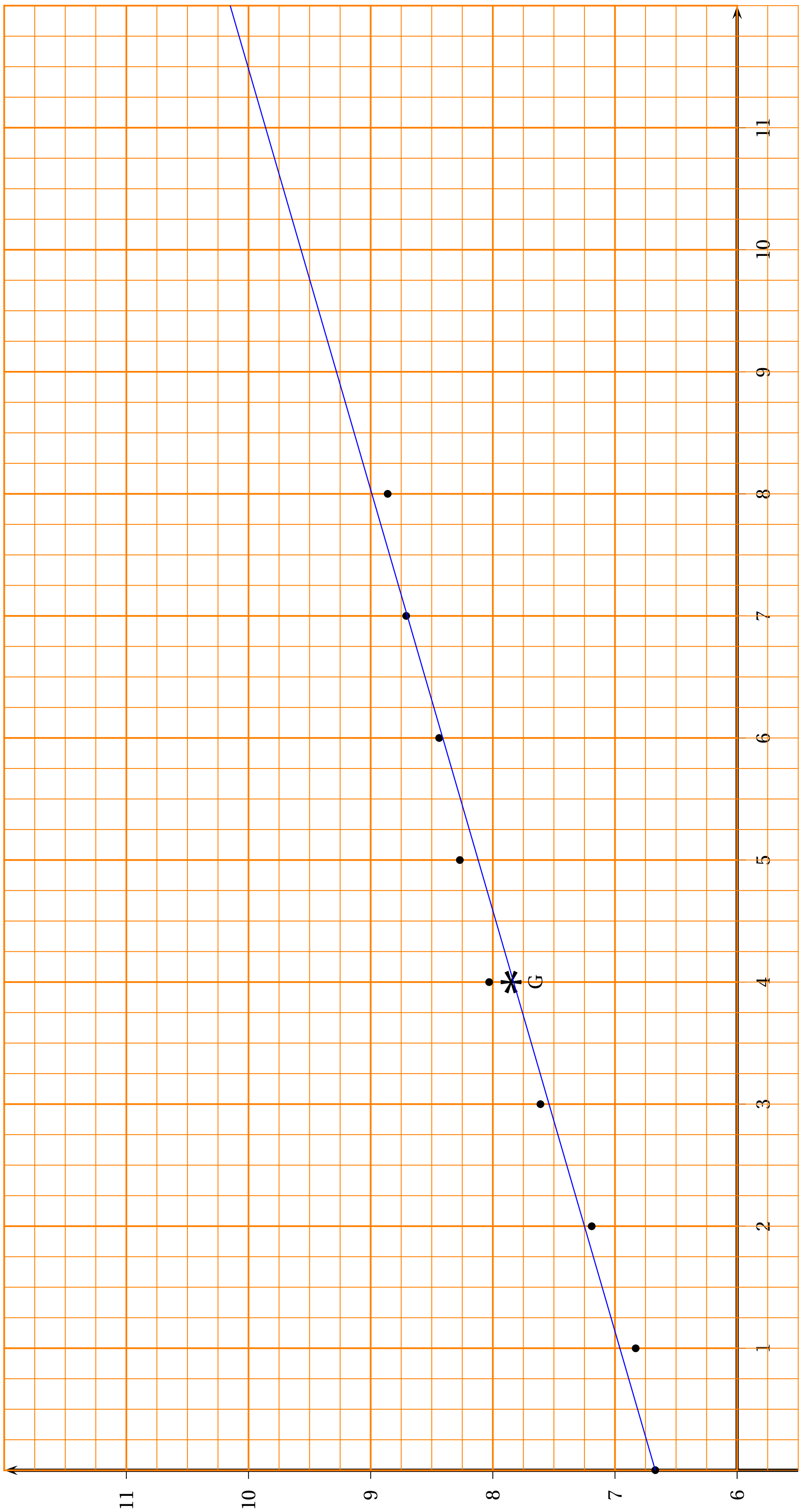
Exercice 3

4. a.

x	2	4	6	10	12,5	14	20	24	30
B(x)	-8,67	4,66	10,79	15,57	16,14	15,98	12,89	9,45	3,03

4. b.





G
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
6
7
8
9
10
11