Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI 2D/STL
Métropole 12 septembre 2013

EXERCICE 1 **4 points**

1. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -5+5\text{i}$ est :

On a $|z|^2 = 5^2+5^2 = 2\times 5^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$, donc $|z| = 5\sqrt{2}$.

Donc $z = 5\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos 3\frac{\pi}{4}+\text{i}\sin 3\frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$: réponse b.

2. $z_1\times z_2 = 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}\times\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{3}} = 4\text{e}^{\text{i}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 4\text{e}^{\frac{9\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}} = 4\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{12}}$. Réponse c.

3. $\dfrac{\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}+\text{i}\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\text{i}\sqrt{2}\right)} = \dfrac{2-2-4\text{i}}{2+2} = -\text{i}$. Réponse d.

4. Ce complexe s'écrit :

$2\sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}+3\text{i}$. Réponse c.

EXERCICE 2 **4 points**

1. a. Par lecture de la table : $p(X > 125,5) = 0,500$.

b. X doit être comprise entre 124 et 127,5 ces deux nombres compris.

Or $p(X < 124) = 0{,}0227501$ et $p(X > 127,5) = 1-0,9961696 = 0{,}0038304$.

Donc $p(124 \leqslant X \leqslant 127,5) = 1-0{,}0227501-0{,}0038304 = 0{,}97342 \approx 0{,}973$.

c. On a $p(X < 124)+p(X > 27,5) = 0{,}0038304+0{,}0227501 \approx 0{,}0266$.

2. a. On a $p = 0,97; q = 0,03; n = 300$.

D'une part $p-1,96\sqrt{\left(\frac{p(1-p}{n}\right)} = 0,97-1,96\sqrt{\left(\frac{0{,}97(1-0{,}97}{300}\right)} = 0,97-0{,}0193 \approx 0,95$; d'autre part

$p+1,96\sqrt{\left(\frac{p(1-p}{n}\right)} = 0,97+1,96\sqrt{\left(\frac{0{,}97(1-0{,}97}{300}\right)} = 0,97+0{,}0193 \approx 0,996$.

D'où l'intervalle de confiance [0,95 ; 0,99].

b. Sur 300 barres, 280 sont conformes, soit une fréquence de $\dfrac{280}{300} \approx 0,93$: cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de confiance. La machine doit être réglée.

EXERCICE 3 **6 points**

1. a. On a $635(1-0,117) = 560,705 \approx 571$ (milligrammes).

b. Un véhicule émettait 500 milligrammes par kilomètre en 2002.

Norme en 2002 : $561\times(1-0,117) = 495,363 \approx 495$. Le véhicule ne respecte pas la norme en 2002.

2.

Variables
  n : un nombre entier naturel
  p : un nombre réel
Initialisation
  Affecter à n la valeur 0
  Affecter à p la valeur 635
Traitement
  Tant que $p > 100$
    Affecter à n la valeur $n+1$
    Affecter à p la valeur $0,883 \times p$
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher $2000 + n$

a. Chaque année l'émission doit baisser de 11,7 %, ce qui revient à multiplier par $1 - 0,117 = 0,883$.

b. Voir l'algorithme.

3. **a.** On a de façon évidente :
$u_1 = 0,883u_0$; $u_2 = 0,883u_1 = 0,883^2 u_0$;
$u_3 = 0,883u_2 = 0883^3 u_0, \dots,\ u_n = 0,883^n \times u_0 = 0,883^n \times 635$.
La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $0,883$ de premier terme $u_0 = 635$.

b. On sait que $u_n = 635 \times 0,883^n$.

4. Il faut résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation :
$635 \times 0,883^n < 100 \iff 0,883^n < \dfrac{100}{635} \iff n \ln 0,883 < \ln\left(\dfrac{100}{635}\right)$ soit à peu près $n > 14,8$. Il faudra attendre 15 ans, soit pas avant 2015.

EXERCICE 4 — 6 points

Partie A - Étude d'une fonction numérique

1.
- $\text{OS} = f(0) = 80 - 20\text{e}^0 = 80 - 20 = 60$.
- $\text{HK} = f(30) = 80 - 20\text{e}^{0,025\times30} = 80 - 20\text{e}^{0,75} \approx 37,7 > 35$.
- $f'(x) = -20 \times 0,025\text{e}^{0,025x} = -0,5\text{e}^{0,025x}$. Comme $\text{e}^{0,025x} > 0$ quel que soit le réel x, $f'(x) < 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; 60]$.

2. La calculatrice donne : $f(55) \approx 0,9 ; f(56) \approx -1$, donc $55 < a < 56$.
$f(55,4) \approx 0,1$ et $f(55,5) \approx -0,1$, donc $55,4 < a < 55,5$.
$\text{OA} = a \approx 55,5$, donc la quatrième est remplie.

Partie B - Calcul d'intégrale et application

1. **a.** On calcule sur $[0 ; 60]$ $F'(x) = 80 - 800 \times 0,025\text{e}^{0,025x} = 80 - 20\text{e}^{0,025x} = f(x)$: F est donc bien une primitive de f sur l'intervalle $[0 ; 60]$.

b. $J = \displaystyle\int_0^{55,5} f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_0^{55,5} = F(55,5) - F(0) = 80 \times 55,5 - 800\text{e}^{0,025\times55,5} - \left(80 \times 0 - 800\text{e}^{0,025\times0}\right) = 4\,440 - 800\text{e}^{1,3875} + 800 = 5\,240 - 800\text{e}^{1,3875}$.

c. $J \approx 2\,036,14$.

2. L'aire $\mathcal{A}$ de la surface à peindre est égale à :

a. $\mathcal{A} = 2J \approx 2 \times 2\,036,14$, soit $\mathcal{A} \approx 4\,072,28$ m^2.

b. Un bidon permet de peindre $68 \times 0,2 = 13,6$ m^2.
Pour peindre $4\,072,28$ m^2 il faudra donc : $\dfrac{4\,072,28}{13,6} \approx 299,4$.
Il faudra donc 300 bidons de peinture.