Corrigé du baccalauréat STL spécialité biotechnologies
Polynésie 21 juin 2018

EXERCICE 1 — 5 points

Dans cet exercice, tous les résultats, sauf mention contraire, seront arrondis à 10^{-2}.

On rendra les annexes 1 et 2 avec la copie.

Le tableau ci-dessous donne la production d'eau potable d'origine souterraine dans un pays, en millions de m^3, entre 2004 et 2014 :

Année	2004	2006	2008	2010	2012	2014
Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	8	10
Volume d'eau potable produit en millions de m^3 : y_i	7,5	11,9	14,5	15,9	17	17,9

On pose : $z_i = -2 + \ln(y_i)$.

1. En **annexe 1**, on donne une capture d'écran de tableur correspondant aux données ci-dessus.

a. Parmi les formules ci-dessous, indiquer sur la copie, la formule, à entrer dans la cellule B4, qui, recopiée vers la droite, complète la dernière ligne du tableau.

Formule 1 : ~~= −2 + LN(B3)~~

Formule 2 : $\boxed{= -2 + \text{LN(B3)}}$

Formule 3 : ~~= −2 + LN(B2)~~

b. Nous avons complété la ligne 4 du tableau de l'**annexe 1**.

2. Le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ z_i)$ est représenté dans le repère du plan donné en **annexe 2** .

3. Déterminons les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points et plaçons-le dans le repère de l'**ANNEXE 2**.

Le point moyen est le point G de coordonnées $(\overline{x}\ ;\ \overline{z})$.

$$\overline{x}_G = \frac{0+2+\cdots+8+10}{6} = 5 \quad \overline{z}_G = \frac{0{,}02+0{,}48+\cdots+0{,}83+0{,}88}{6} \approx 0{,}61$$

G (5 ; 0,61)

4. On souhaite réaliser un ajustement affine de ce nuage de points par la droite D d'équation $z = ax + b$, obtenue par la méthode des moindres carrés.

a. À l'aide de la calculatrice, les valeurs de a et b arrondies à 10^{-3} sont respectivement 0,079 et 0,214.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $z = 0,08x + 0,21$ *pour équation de la droite D.*

b. La droite D est tracée sur **l'annexe 2**.

c. Déterminons avec ce modèle d'ajustement, l'année à partir de laquelle le volume d'eau potable d'origine souterraine produit atteindra 24 millions de m^3.

Calculons la valeur de z correspondant à un volume de 24 millions de m^3.

$z = -2 + \ln 24 \approx 1{,}178$.

Déterminons l'abscisse du point de la droite d'ordonnée 1,178.

Résolvons $1{,}178 = 0{,}08x + 0{,}21$. Il en résulte $x = \dfrac{1{,}178 - 0{,}21}{0{,}08} \approx 12{,}1$.

Nous pouvons estimer qu'à partir de 2017 (2004+13) le volume d'eau potable d'origine souterraine produit atteindra 24 millions de m^3.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

Une entreprise fabrique des lames de microscope. Une enquête permet d'estimer que la probabilité qu'une lame de microscope, prélevée au hasard dans la production, ne soit pas conforme au cahier des charges est égale à 0,05.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 200 lames de microscope dans la production, associe le nombre de lames de microscope qui ne sont pas conformes au cahier des charges. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler chaque prélèvement à un tirage avec remise.

On prélève au hasard 200 lames de microscope.

1. **a.** Il est prélevé de façon indépendante 200 lames de microscope et la probabilité à chaque tirage d'avoir une lame non conforme est de $0,05$: la variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,05$.

b. Calculons l'espérance mathématique de X. $\mathbb{E}(X) = np$ d'où $\mathbb{E}(X) = 200 \times 0,05 = 10$.
Calculons maintenant l'écart type de X.
$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$ d'où $\sigma_X = \sqrt{200 \times 0,05 \times (1-0,05)} \approx 3,08$.

c. La probabilité de l'événement suivant : « Exactement 6 lames de microscope parmi les 200 ne sont pas conformes au cahier des charges » est $P(X = 6)$.
À la calculatrice, nous trouvons, arrondi à 10^{-2}, $P(X = 6) \approx 0,06$.

d. L'entreprise ne peut pas garantir à ses clients qu'au maximum 1 lame de microscope parmi les 200 n'est pas conforme au cahier des charges. En calculant la probabilité que X soit inférieur à 1, nous trouvons $P(X \leqslant 1) \approx 4,04 \cdot 10^{-4}$, donc une probabilité presque nulle c'est-à-dire la probabilité d'un événement quasi impossible.

2. On décide d'approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance µ=10 et d'écart type $\sigma = 3,08$.

a. Les conditions $n \geqslant 30$, $np > 5$ et $np(1-p) > 5$ sont vérifiées,
par conséquent la loi binomiale peut être approximée par la loi normale de paramètres µ= np et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
Les valeurs choisies sont celles obtenues à la question **1a**.

b. Déterminons à la calculatrice, la probabilité $P(7 \leqslant Y \leqslant 10)$. Nous trouvons alors environ 0,67. Le résultat obtenu est la probabilité que dans le lot prélevé, il y ait entre sept et dix lames non conformes.

3. Le responsable de la chaîne de production annonce au directeur de l'entreprise que 5 % des lames de microscope produites ne sont pas conformes au cahier des charges.

a. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des lames de microscope qui ne sont pas conformes pour un échantillon de 250 lames de microscope produites est

$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

$$\left[0,05 - 1,96\sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{250}}\ ;\ 0,05 + 1,96\sqrt{\frac{0,05(1-0,05)}{250}}\right] \approx [0,049\ ;\ 0,051]$$

Les bornes de l'intervalle sont arrondies à 10^{-3}

b. Un contrôleur qualité de l'entreprise prélève un échantillon de 250 lames de microscope produites dans lequel il trouve 17 lames qui ne sont pas conformes.
La fréquence de lames de microscopes qui ne sont pas conformes est $\dfrac{17}{250} = 0,07$.
En utilisant l'intervalle de fluctuation précédent, nous pouvons dire, que la proportion de lames de microscopes qui ne sont pas conformes est significativement plus élevée que dans l'annonce du responsable de chaîne puisque la proportion n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation.
Cet échantillon remet en cause l'annonce du responsable de la chaîne de production.

EXERCICE 3 **6 points**

Un sportif fait le test suivant : il court à une vitesse de $6\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, on déclenche alors un chronomètre à $t = 0$ minute, puis le sportif augmente sa vitesse de 10 % chaque minute, jusqu'à arrêt de l'effort.
En parallèle, un dispositif permet d'évaluer sa production d'acide lactique après chaque minute d'effort.
(*L'acide lactique est un déchet qui se forme dans les cellules privées d'oxygène et qui limite les performances physiques.*)

Partie A

Pour tout entier naturel n, on note v_n la vitesse, en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, de ce sportif, n minutes après le déclenchement du chronomètre. On a : $v_0 = 6$.

1. À une augmentation de 10 % correspond un coefficient multiplicateur de $1 + \dfrac{10}{100}$ soit 1,1.
Passant d'un terme au suivant en le multipliant par 1,1, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme $v_0 = 6$.

2. La vitesse de ce sportif 5 minutes après le déclenchement du chronomètre est v_5.
Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 q^n$.
Il en résulte : $v_5 = 6 \times (1{,}1)^5 \approx 9{,}663$.
La vitesse de ce sportif 5 minutes après le déclenchement du chronomètre, arrondie à $0{,}1\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ est d'environ $9{,}7\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
n ⟵ 0
v ⟵ 6
Tant que v ⩽ 12
    n ⟵ n+1
    v ⟵ 1,1 × v
Fin Tant que
```

a. Donnons, dans un tableau, les valeurs successives prises par les variables n et v lors du déroulement de l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v	6	6,6	7,3	8,0	8,8	9,7	10,6	11,7	12,8	
	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse	

b. La valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme est 8.
La vitesse de ce sportif huit minutes après le déclenchement du chronomètre, est supérieure à $12\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Partie B

On estime que la production d'acide lactique de ce coureur lors de l'effort est modélisée par une fonction f définie sur $[0\,;\,13]$. Cette fonction qui au temps t, exprimé en minutes, associe la production d'acide lactique du coureur, exprimée en millimole par litre, à l'instant t, est une solution de l'équation différentielle (E) :$y' - 0{,}17y = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,13]$.

1. Résolvons l'équation différentielle (E) sur $[0\,;\,13]$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = C\text{e}^{-ax}$ où C est une constante quelconque.
$a = -0{,}17$ par conséquent sur $\mathbb{R}$ *a fortiori* sur $[0\,;\,13]$ $f(t) = C\text{e}^{0{,}17t}$ où C est une constante quelconque.

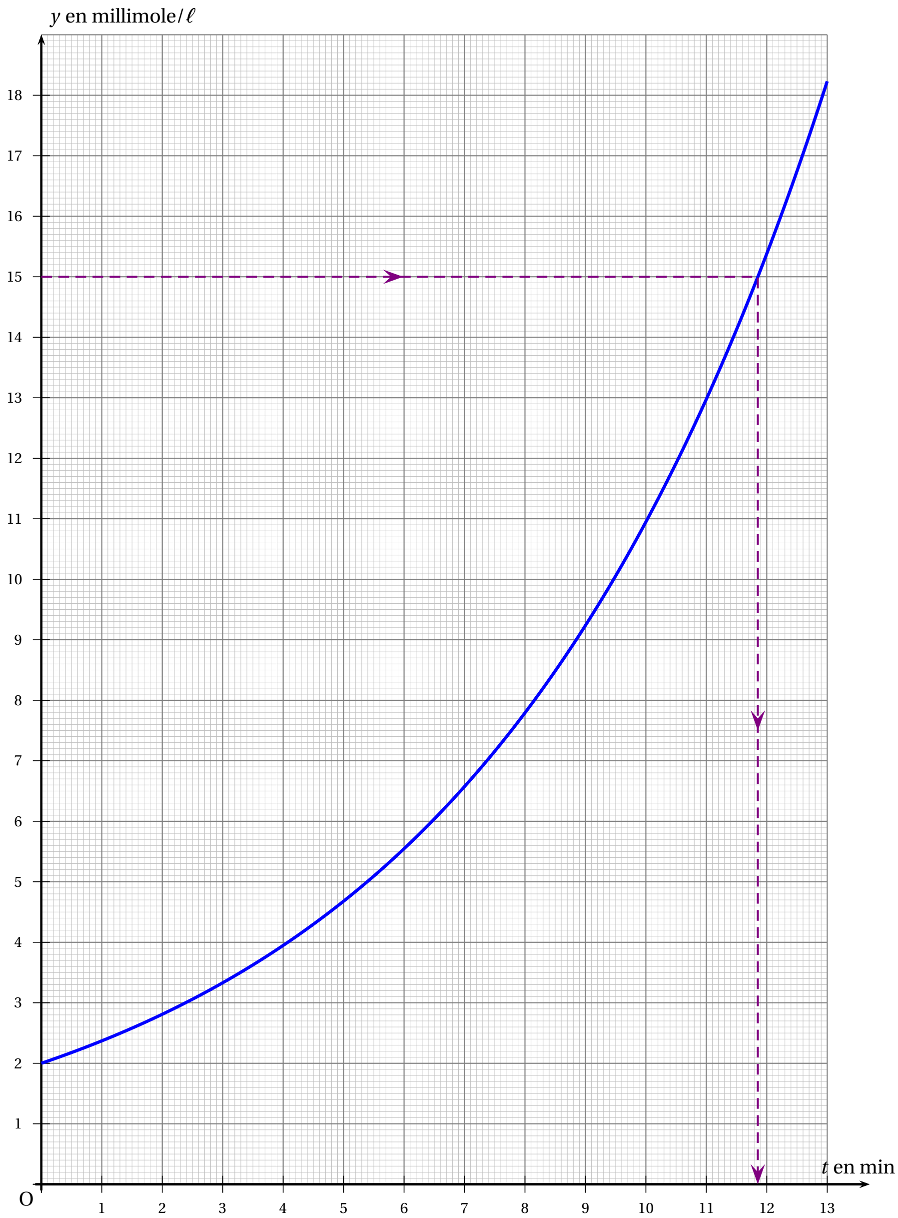
2. Sachant que $f(0) = 2$, déterminons l'expression de $f(t)$ pour tout t de $[0 ; 13]$.
$f(0) = C\text{e}^{0,17\times 0} = 2$ d'où $C = 2$.

$$t \in [0 ; 13],\ f(t) = 2\text{e}^{0,17t}.$$

3. Pour la suite de l'exercice, on prend pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 13]$, $f(t) = 2\text{e}^{0,17t}$.

a. $f'(t) = 2 \times (0,17)\,\text{e}^{0,17t} = 0,34\text{e}^{0,17t}$.
Étudions le signe de $f'(t)$.
$f'(t) > 0$ comme produit de nombres réels strictement positifs.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I
Sur $[0 ; 13]$, $f'(t) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.

b. La courbe représentative de la fonction f est tracée ci-dessous.



c. On estime que le sportif arrête son effort lorsque le taux d'acide lactique dépasse 15 millimoles par litre. Afin de déterminer au bout de combien de minutes ce sportif arrêtera son effort, résolvons $f(t) \geqslant 15$.

$$2\,\mathrm{e}^{0,17t} \geqslant 15$$
$$\mathrm{e}^{0,17t} \geqslant 7,5$$
$$\ln(\mathrm{e}^{0.17t}) \geqslant \ln(7,5)$$
$$0,17t \geqslant \ln(7,5)$$
$$t \geqslant \frac{\ln(7,5)}{0,17}$$

$\dfrac{\ln(7,5)}{0,17} \approx 11,852$

Au bout de douze minutes, ce sportif arrêtera son effort. Il courrait alors à la vitesse de $18,8\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ $\left(6 \times 1,1^{12}\right)$.

4. Un autre sportif, produisant moins d'acide lactique, est soumis au même test. Son taux d'acide lactique est donné par la fonction g définie sur $[0~;~13]$ par $g(t) = 2\mathrm{e}^{kt}$ où k est un réel positif.

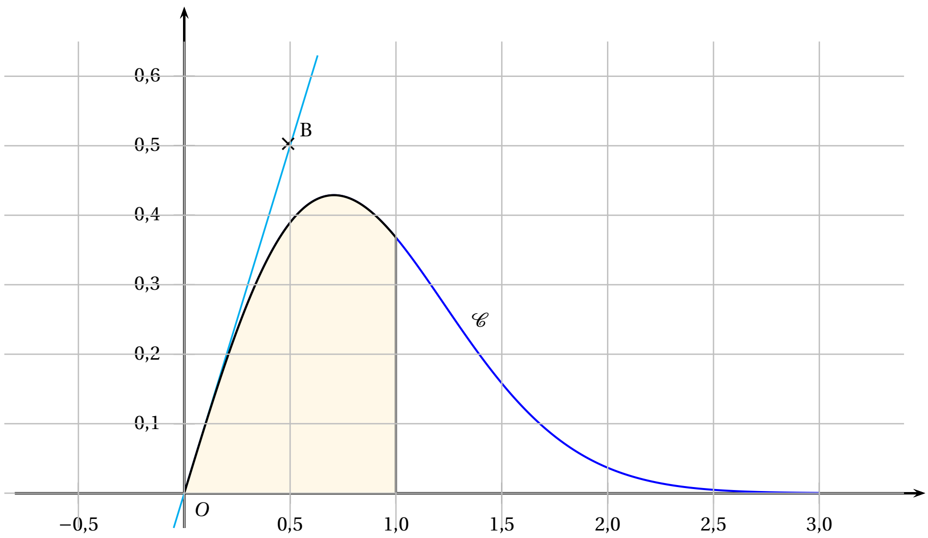
En comparant cette situation avec la précédente, nous pouvons dire que le coefficient k est inférieur à 0,17.

Pour tout t, $g(t) \leqslant f(t)$ donc $2\mathrm{e}^{kt} \leqslant 2\mathrm{e}^{0,17t}$ soit encore $kt \leqslant 0,17t$.

Cela justifie l'affirmation donnée.

EXERCICE 4 — 4 points

Soit f la fonction définie sur $[0~;~3]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$, f' sa fonction dérivée. On nomme $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal d'origine O.
Soit le point $B(0,5~;~0,5)$. La droite (OB) est tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O.
On nomme I l'aire située entre la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Ci-dessous, on a représenté la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (OB) :



On donne les résultats suivants sur la fonction f (il n'est pas demandé de justifier ces résultats) :

Dérivée de f sur $[0~;~3]$:
$$f'(x) = (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$$
Primitives F de f sur $[0~;~3]$:
$$F(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + k, \quad k \in R$$

Ci-dessous, on donne quatre affirmations concernant cette fonction f.
Indiquer sur la copie si l'affirmation proposée est vraie ou fausse. **Toute réponse sera justifiée.**

Affirmation 1 : $f'(0) = 1$.

Affirmation vraie : $f'(0) = (1 - 2 \times 0^2)\mathrm{e}^{-0^2} = 1$

Remarque : le coefficient directeur de la droite (OB) est 1 ($\frac{0,5}{0,5} = 1$). C'est le nombre dérivé en 0.

Affirmation 2 : pour tout x appartenant à $[0\ ;\ 3]$, $f'(x) \geqslant 0$.

Affirmation fausse : la fonction est décroissante sur $[1\ ;\ 2]$ par conséquent la dérivée est négative sur cet intervalle.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de définir le plus grand intervalle sur lequel la fonction est décroissante.

Affirmation 3 : l'aire I est supérieure à 0,15 unité d'aire.

Affirmation vraie : La fonction f étant positive sur $[0\ ;\ 1]$ l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

$$I = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\right]_0^1 = F(1) - F(0) = -\frac{\mathrm{e}^{-1^2}}{2} - \left(-\frac{\mathrm{e}^{-0^2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} \approx 0{,}316.$$

Remarque : Nous aurions pu compter les rectangles sous la courbe. L'aire d'un rectangle est 0,05 unité d'aire, il en fallait au moins 3.

Affirmation 4 : la primitive G de la fonction f qui s'annule en 0 est définie pour tout x de $[0\ ;\ 3]$ par $G(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Affirmation vraie : Déterminons k tel que $F(0) = 0$.

$$-\frac{\mathrm{e}^{-0^2}}{2} + k = 0 \text{ soit } -\frac{1}{2} + k = 0 \text{ d'où } k = \frac{1}{2}$$

La primitive G de f qui s'annule en 0 est définie par $x \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + \dfrac{1}{2}$.

ANNEXE 1

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année	2004	2006	2008	2010	2012	2014
2	rang de l'année : x_i	0	2	4	6	8	10
3	Volume d'eau potable produit en millions de m^3 : y_i	7,5	11,9	14,5	15,9	17	17,9
4	z_i	0,01	0,48	0,67	0,77	0,83	0,88

ANNEXE 2