Corrigé du baccalauréat STL spécialité biotechnologies
Métropole – La Réunion 19 juin 2018

EXERCICE 1 **4 points**

La plus ancienne méthode de conservation des aliments pratiquée par l'homme est la déshydratation.
Ce procédé consiste à utiliser une source de chaleur pour faire évaporer de l'eau d'un aliment. Dans tout l'exercice, on s'intéresse à un abricot frais placé dans un séchoir pour le déshydrater. Avant déshydratation, cet abricot frais a une masse de 45 g dont 85 % d'eau. Le processus de déshydratation s'achève lorsque cet abricot a une masse de 9 g dont 25 % d'eau, il bénéficie alors de l'appellation « abricot sec ».

1. Calculons la masse d'eau contenue dans cet abricot frais.

$$45 \times 0,85 = 38,25$$

La masse d'eau contenue dans l'abricot frais est de 38,25 g.

2. Vérifions que cet abricot ayant l'appellation « abricot sec » ne contient plus que 2,25 g d'eau.

$$9 \times 0,25 = 2,25$$

La masse d'eau contenue dans l'abricot ayant l'appellation « abricot sec » est de 2,25 g.

Soit f la fonction qui, à toute durée t exprimée en heures, associe la masse d'eau (en grammes) contenue dans cet abricot placé dans le séchoir depuis t heures. On admet que pour tout réel t de l'intervalle $[0,13]$, $f(t) = 38,25\mathrm{e}^{-0,26t}$. En annexe 1, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.

1. **a.** La masse d'eau présente dans cet abricot après deux heures passées dans le séchoir est $f(2)$. $f(2) = 38,25\mathrm{e}^{-0,26\times 2} \approx 22,74$.

La masse d'eau contenue dans l'abricot frais après deux heures passées dans le séchoir, arrondie à 10^{-2} g, est de 22,74 g.

b. Si on laisse cet abricot dans le séchoir pendant 8 heures, pourra-t-il bénéficier de l'appellation « abricot sec » ? Pour le savoir, calculons la masse d'eau contenue dans l'abricot après huit heures passées dans le séchoir soit $f(8)$. $f(8) = 38,25\mathrm{e}^{-0,26\times 8} \approx 4,7786$.

Il ne pourra bénéficier de l'appellation « abricot sec » car la masse d'eau est encore trop importante (4,78 >2,25) .

c. Déterminons le temps de séchage nécessaire pour que l'abricot placé dans le séchoir puisse bénéficier de l'appellation « abricot sec ». Pour ce faire, résolvons $f(t) = 2,25$.

$$\begin{aligned} 38,25\mathrm{e}^{-0,26\times t} &= 2,25 \\ \mathrm{e}^{-0,26\times t} &= \frac{2,25}{38,25} \\ \ln\left(\mathrm{e}^{-0,26\times t}\right) &= \ln\left(\frac{2,25}{38,25}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0,26\times t &= \ln\left(\frac{2,25}{38,25}\right) \\ t &= \frac{\ln\left(\frac{2,25}{38,25}\right)}{-0,26} \\ t &\approx 10,89697 \end{aligned}$$

Le temps de séchage nécessaire pour que l'abricot ait l'appellation « abricot sec » est d'environ 10,90 h, soit à la minute près, 10 heures 54 minutes.

2. On considère maintenant la totalité du processus de déshydratation qui permet de passer de l'abricot frais, contenant 38,25 g d'eau, à l'abricot ayant l'appellation « abricot sec », contenant 2,25 g d'eau.

Camille affirme : « dans ce processus, le temps nécessaire pour éliminer les 5 derniers grammes d'eau est environ 15 fois le temps nécessaire à l'élimination des 5 premiers grammes d'eau ! ».

Cette affirmation est-elle exacte? Justifier. On pourra utiliser la représentation graphique de l'annexe 1 (dans ce cas, on rendra l'annexe 1 avec la copie et on laissera les traits de construction nécessaires apparents).

Pour infirmer ou confirmer cette affirmation, calculons le temps mis pour que l'abricot perde cinq grammes au début du processus, le temps mis pour que l'abricot ait encore une masse de cinq grammes supérieure à la masse finale enfin le temps mis pour perdre ces derniers cinq grammes.

Temps nécessaire pour avoir une masse en grammes de $38,25-5$ soit 33,25

Nous résolvons $f(t) = 33,25$. Par la même méthode qu'à la question **3. c.** nous trouvons en heures 0,54

Temps nécessaire pour avoir une masse en grammes de 2,25 + 5 soit 7,25 : nous trouvons en heures 6,3967

Par conséquent le temps nécessaire à la perte des cinq derniers grammes est de $10,897-6,397$ soit 4,50.

Il eût donc fallu que le temps pour perdre les cinq derniers grammes fût, en heures, de $0,54 \times 15$ soit 8,1 pour que l'affirmation fût vraie.

EXERCICE 2 **4 points**

Un fabricant a mis au point une machine permettant de fabriquer des blocs de glace (utilisables sur les bateaux de pêche par exemple). L'épaisseur des blocs de glace fabriqués dépend du temps de congélation.
On obtient le tableau ci-dessous :

Temps t_i de congélation(en heures)	1	2	4	8	12	18	26
Épaisseur y_i de la glace(en cm)	4	8	11	16,5	20,5	24,5	28,5

On pose $x_i = \ln t_i$.

1. Complétons le tableau ci-dessous. Les valeurs seront arrondies au dixième.

x_i	0	0,7	1,4	2,1	2,5	2,9	3,3
Épaisseur y_i de la glace(en cm)	4	8	11	16,5	20,5	24,5	28,5

2. Le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) est représenté dans le repère orthogonal fourni à **l'annexe** 2, qui est **à rendre avec la copie.**

3. À l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement (d) de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 7,38x+2,54$ (les coefficients sont arrondis à 10^{-2}).

Pour la suite, on prend comme modèle d'ajustement, la droite (d) d'équation $y = 7,4x+2,5$.

4. Cette droite (d) est tracée dans le repère de l'**annexe 2**.

5. Déterminons, selon le modèle d'ajustement pris, et à l'heure près, le temps nécessaire pour fabriquer un bloc de glace de 32 cm d'épaisseur.

Calculons, selon le modèle, la valeur de x pour laquelle l'épaisseur de la glace est de 32 cm.

Résolvons $32 = 7,38x+2,54$. $x = \dfrac{32-2,54}{7,38} \approx 3,99$. Nous avons alors $\ln(t) = 3,99$.

Par conséquent le temps nécessaire est $\mathrm{e}^{3,99}$ soit environ 54 heures.

EXERCICE 3 **6 points**

Une colonie de bactéries est mise en culture avec du glucose.
Pendant la 1^re^ période de 10 minutes, la masse de glucose absorbé par la colonie de bactéries est égale à 18,3 femtogrammes
(1 gramme est égal à 10^{15} femtogrammes (fg)).
Pendant la 2^e^ période de 10 minutes, la masse de glucose absorbé par la colonie de bactéries augmente de 26 % par rapport à la masse de glucose absorbé pendant la 1^re^ période.

1. Montrons que la masse de glucose absorbé pendant la 2^e^ période de 10 min est égale à 23,058 femtogrammes.

   À une augmentation de 26 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,26.

   $18,3 \times 1,26 = 23,058$.

   La masse de glucose absorbé pendant la 2^e^ période de 10 minutes est égale à 23,058 femtogrammes.

Dans la suite, on étudie l'évolution de la masse de glucose absorbé par la colonie de bactéries en prenant le modèle suivant :

- pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note u_n la masse, en femtogrammes, de glucose absorbé pendant la n-ième période de 10 minutes ;
- pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, la masse de glucose u_{n+1} absorbé par la colonie de bactéries pendant la (n+1)-ième période de 10 minutes augmente de 26 % par rapport à la masse de glucose u_n absorbé pendant la n-ième période de 10 minutes précédente.

2. **a.** $u_1 = 18,3$ et $u_2 = 23,058$. La première valeur est donnée dans le texte, la seconde calculée à la question précédente.

   b. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 18,3$ et de raison 1,26 puisque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par 1,26.

   c. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, exprimons u_n en fonction de n.
   Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q est
   $u_n = u_1 q^{n-1}$ $\qquad u_n = 18,3 \times (1,26)^{n-1}$

   d. Calculons la masse de glucose absorbé pendant la 7^e^ période de 10 minutes, c'est-à-dire u_7.
   $u_7 = 18,3 \times 1,26^6 \approx 73,2$.
   La masse de glucose absorbé pendant la 7^e^ période de 10 minutes, arrondie à 0,1 femtogramme est de 73,2 fg.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
n ⟵ 1
u ⟵ 18,3
Tant que u ⩽ 100
    n ⟵ n + 1
    u ⟵ 1,26 × u
Fin Tant que
```

   Déterminons la valeur de n en exécutant l'algorithme.

n	7	8	9	10
u	73,2	92,3	116,3	
$u \leqslant 100$	vraie	vraie	faux	

   La valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme est 9.

   L'algorithme calcule le nombre de période de 10 min pendant laquelle la masse de glucose absorbé reste inférieure à 100 fg.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à la masse totale de glucose absorbé depuis le début de la mise en culture. Dans ce cadre, on exploite la feuille de calcul suivante obtenue à l'aide d'un tableur :

	A	B	C
1	n	u_n	S_n
2	1	18,3	18,3
3	2	23,058	41,358
4	3	29,05308	70,41108
5	4	36,6068808	107,017961
6	5	46,1246698	153,142631

4. **a.** La valeur de la cellule C4 est la masse totale de glucose absorbé durant les trois premières périodes.

b. Une formule qui a pu être entrée dans la cellule C3 pour obtenir, par recopie vers le bas, les valeurs suivantes de la colonne C est : =$B3+$C2

remarque Nous aurions pu écrire = Somme(B2 : $B3)

5. Déterminons le nombre d'heures nécessaire, depuis le début de la mise en culture, à l'absorption de 1 gramme de glucose par la colonie de bactéries (on rappelle que 1 gramme est égal à 10^{15} femtogrammes). Pour ce faire déterminons n tel que $S_n = 10^{15}$

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1 est :

$$S_n = u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

soit $S_n = 18,3 \times \dfrac{1,26^n - 1}{1,26 - 1}$. Résolvons alors $18,3 \times \dfrac{1,26^n - 1}{1,26 - 1} = 10^{15}$.

$$18,3 \times \frac{1,26^n - 1}{1,26 - 1} = 10^{15}$$
$$18,3 \times (1,26^n - 1) = 10^{15} \times (1,26 - 1)$$
$$18,3 \times (1,26^n - 1) = 26 \times 10^{13}$$
$$1,26^n - 1 = \frac{26 \times 10^{13}}{18,3}$$
$$1,26^n = 1 + \frac{26 \times 10^{13}}{18,3}$$

$$\ln 1,26^n = \ln\left(1 + \frac{26 \times 10^{13}}{18,3}\right)$$
$$n \ln 1,26 = \ln\left(1 + \frac{26 \times 10^{13}}{18,3}\right)$$
$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{26 \times 10^{13}}{18,3}\right)}{\ln 1,26}$$
$$n \approx 131,04$$

Il faut une durée d'environ 132 périodes de 10 min.

Déterminons le nombre d'heures nécessaires. Il y a six périodes par heure d'où $\dfrac{132}{6} = 22$.

Pour que la masse de glucose absorbé par les bactéries depuis le début de la mise en culture soit de 1 g il faut une durée d'environ 22 heures.

EXERCICE 4 — 6 points

Les trois parties sont indépendantes.

Dans une ville, un cardiologue s'intéresse à la tension artérielle (systolique), mesurée en millimètres de mercure (mmHg), des femmes de plus de 60 ans.

Partie A

On note T la variable aléatoire qui, à chaque dossier médical d'une femme de la ville de plus de 60 ans, associe la tension artérielle de cette femme mesurée en mmHg. On suppose que T suit la loi normale d'espérance μ= 134 et d'écart-type $\sigma = 8,5$.

1. Le cardiologue choisit au hasard le dossier médical d'une femme de plus de 60 ans parmi les dossiers médicaux des femmes de la ville.

   a. La probabilité que la tension artérielle de cette femme soit comprise entre 130 et 140 mmHg est notée $p(130 \leqslant X \leqslant 140)$. À l'aide de la calculatrice, nous trouvons $p(130 \leqslant X \leqslant 140) \approx 0{,}441$ (valeur arrondie au millième).

   b. La probabilité que la tension artérielle de cette femme soit supérieure à 140 mmHg est notée $p(X \geqslant 140)$. À l'aide de la calculatrice, nous trouvons $p(X \geqslant 140) \approx 0{,}240$ (valeur arrondie au millième).

2. Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ,

   nous savons que la probabilité $p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$ est égale, à 0,01 près, à 0,95.

   Par conséquent, il suffira de prendre pour h la valeur de 2σ soit 17. Nous obtenons donc $h = 17$.

   Pour $h = 17$ nous avons $P(134 - 17 \leqslant T \leqslant 134 + 17) \approx 0{,}95$ (à 10^{-2} près).

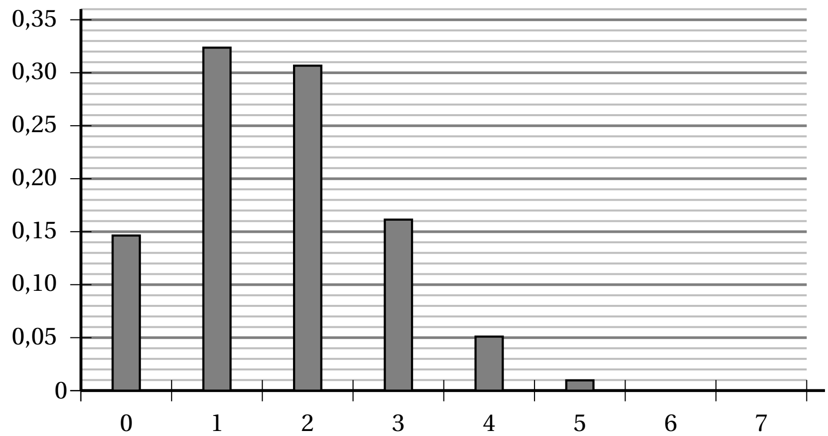
   La probabilité que cette femme ait une tension artérielle comprise entre 117 et 151 mmHg est d'environ 0,95.

Partie B

On admet que 24 % des femmes de plus de 60 ans de la ville étudiée sont atteintes d'hypertension artérielle. On constitue au hasard un échantillon composé de 7 dossiers médicaux de femmes de plus de 60 ans dans la ville étudiée. Le nombre total de dossiers médicaux de femmes de plus de 60 ans dans cette ville est suffisamment élevé pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de dossiers médicaux de femmes atteintes d'hypertension artérielle dans un échantillon de 7 dossiers médicaux.

1. La loi suivie par X est une loi binomiale $\mathscr{B}(7\ ;\ 0{,}24)$ puisque il y a répétition de 7 tirages indépendants et identiques caractérisés par deux issues soit le choix d'une personne atteinte d'hypertension artérielle de probabilité 0,24 soit le choix d'une personne n'ayant pas d'hypertension artérielle de probabilité $1 - 0{,}24$.

2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la loi suivie par X (en abscisses, on lit les valeurs prises par k et en ordonnées, les valeurs prises par $P(X = k)$) :



   a. À l'aide du graphique, déterminons une valeur approchée à 0,01 près de la probabilité pour qu'il y ait au moins 4 dossiers médicaux de femmes atteintes d'hypertension artérielle dans un échantillon de 7 dossiers médicaux.

   $p(X \geqslant 4) = p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) + p(X = 7)$

   Nous lisons sur le graphique $p(X = 4) = 0{,}05$, $p(X = 5) = 0{,}01$ et rien pour $k = 6$ et $k = 7$.

   Par conséquent $p(X \geqslant 4) \approx 0{,}06$ à 0,01 près.

b. Expliquons ce qui se passe sur la représentation graphique pour $X = 6$ et $X = 7$.

Les valeurs sont trop petites au regard de l'échelle du graphique par conséquent elles ne peuvent apparaître sur le graphique.

À la calculatrice, nous obtenons $p(X = 6) \approx 0,001017$

Partie C

Un centre hospitalier universitaire souhaite comparer l'efficacité de deux régimes alimentaires distincts, notés A et B, destinés à réduire l'hypertension artérielle dans la population des femmes de plus de 60 ans de la ville. Il constitue, au hasard, deux groupes de 200 femmes de plus de 60 ans de la ville souffrant d'hypertension artérielle :

- après avoir suivi le régime A, 15 femmes du premier groupe de 200 femmes n'ont pas de réduction de leur hypertension artérielle ;
- après avoir suivi le régime B, 50 femmes du second groupe de 200 femmes n'ont pas de réduction de leur hypertension artérielle.

En exploitant la notion d'intervalle de confiance, peut-on parler de différence significative d'efficacité entre les deux régimes alimentaires en termes de réduction d'hypertension artérielle ?
Un intervalle de confiance au risque de 5 % est

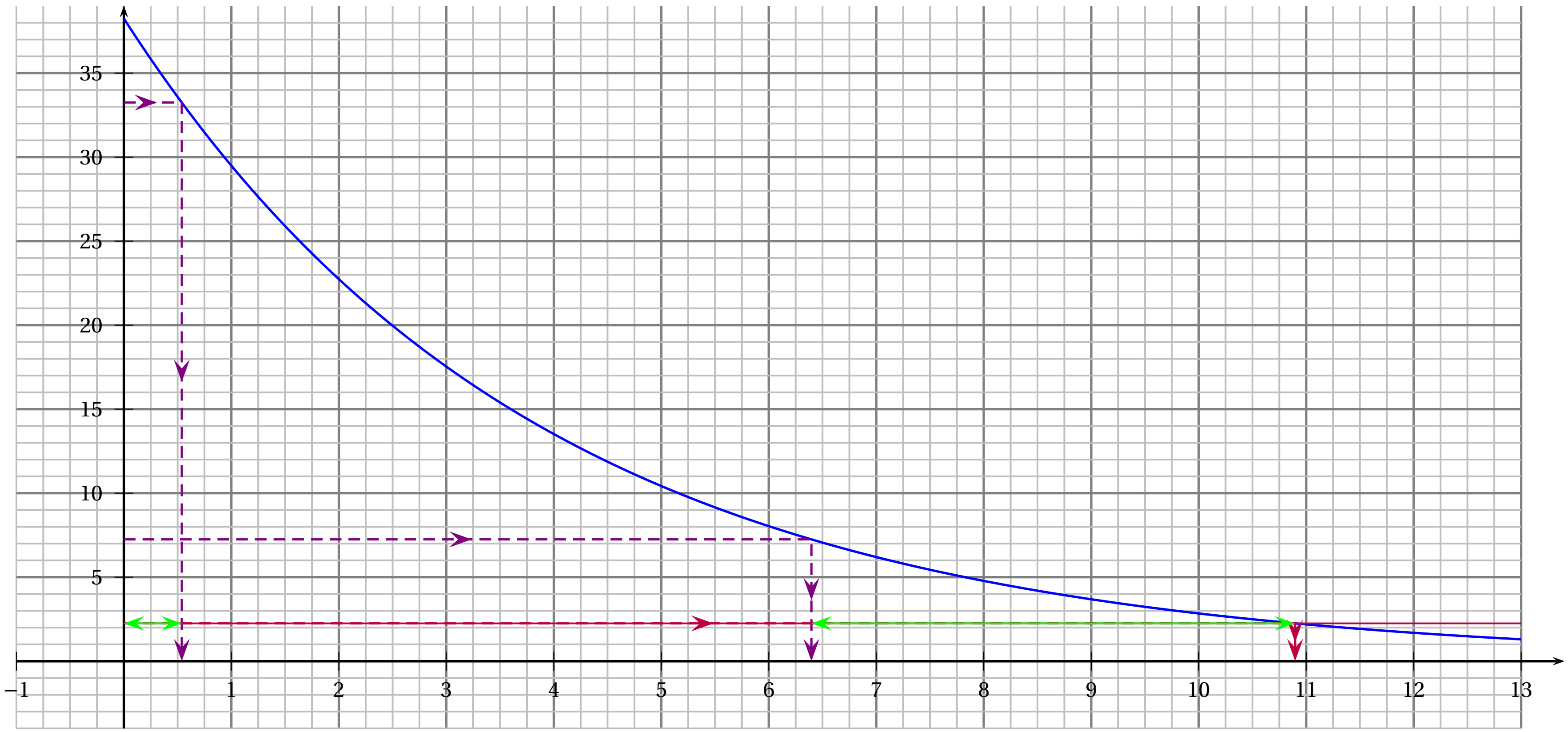
$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ,\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

Dans le premier cas, régime A, nous avons $f_A = \dfrac{15}{200} = 0,075 \quad n = 200$
dans le second , régime B, $f_B = \dfrac{50}{200} = 0,25 \quad n = 200$.
Il en résulte :
$I_A = \left[0,075 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,075 \times (1-0,075)}{200}}\ ;\ 0,075 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,075 \times (1-0,075)}{200}}\right]$ $I_A = [0,0385\ ;\ 0,1115]$

$I_B = \left[0,25 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,25 \times (1-0,25)}{200}}\ ;\ 0,25 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,25 \times (1-0,25)}{200}}\right]$ $I_B = [0,1900\ ;\ 0,3100]$
Les intervalles de confiance étant disjoints, l'efficacité des deux régimes alimentaires est significativement différente.

Annexe 1 (exercice 1) : courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f

À rendre avec la copie.



En vert, la durée nécessaire pour perdre 5 g.

Nous pouvons constater que la seconde n'est pas quinze fois plus grande que la première.

Annexe 2 (exercice 2) :pour la représentation graphique

À rendre avec la copie.