Sciences et Technologies du Management et de la Gestion
Métropole 9 septembre 2014 Correction

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chacune des quatre questions, une et une seule des réponses proposées est exacte.
Recopier sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque bonne réponse rapporte un point.
Aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou pour une absence de réponse.
Aucune justification n'est attendue.

En 2012, le prix d'un litre de carburant était de 1,40 €.
Ce prix a connu une augmentation de 3 % entre 2012 et 2013.

1. Le prix d'un litre de carburant en 2013 était alors de :

a. ~~1,82 €~~ **b.** 1,442 € **c.** ~~1,43 €~~ **d.** ~~4,40 €~~

2. Ce prix augmente à nouveau de 10 % entre 2013 et 2014.
Entre 2012 et 2014, le prix a globalement augmenté de :

a. ~~13 %~~ **b.** 13,3 % **c.** ~~43 %~~ **d.** ~~11,33 %~~

3. On prévoit que, sur la période 2014 – 2016, le prix du litre de carburant va augmenter globalement de 12,36 %.
Le taux d'évolution annuel moyen sur cette période sera alors de :

a. 6 % **b.** ~~6,18 %~~ **c.** ~~3,52 %~~ **d.** ~~3,09 %~~

4. En supposant que, durant les quatre années précédant 2012, le prix d'un litre de carburant a augmenté de 5 % par an, le prix d'un litre de carburant en 2008, au centime près, était de :

a. ~~1,14 €~~ **b.** ~~1,20 €~~ **c.** ~~1,128 €~~ **d.** 1,15 €

EXERCICE 2 **5 points**

Les parties A et B sont indépendantes.
Les résultats des probabilités seront donnés sous forme décimale.

Partie A

Un magasin vend des appareils électroménagers. Une enquête statistique sur ses clients a montré que :

- 10 % des clients achètent un réfrigérateur ;
- parmi les clients qui achètent un réfrigérateur, 30 % achètent aussi un four à micro-ondes ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de réfrigérateur, 15 % achètent un four à micro-ondes.

On choisit au hasard un client du magasin.
On considère les évènements R et M suivants :

R : « le client achète un réfrigérateur »

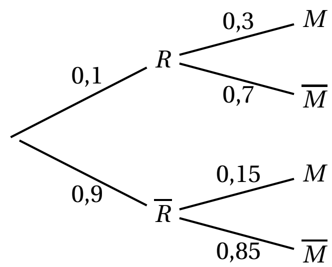
M : « le client achète un four à micro-ondes ».

Pour tout évènement E, on note $p(E)$ sa probabilité et $\overline{E}$ l'évènement contraire de E ; si de plus F est un évènement de probabilité non nulle, on note $p_F(E)$ la probabilité de l'évènement E sachant que F est réalisé.

1. a. Donnons les valeurs de

- $p(R)$: $p(R) = 0{,}1$ car 10 % des clients achètent un réfrigérateur
- $p_R(M)$: $p_R(M) = 0{,}3$ car parmi les clients qui achètent un réfrigérateur, 30 % achètent aussi un four à micro-ondes ;
- $p_{\overline{R}}(M)$: $p_{\overline{R}}(M) = 0{,}15$ car parmi les clients qui n'achètent pas de réfrigérateur, 15 % achètent un four à micro-ondes.

b. Complétons l'arbre pondéré décrivant la situation.



2. a. $R \cap M$ est l'évènement : « le client achète un réfrigérateur et un four à micro-ondes ».

b. Calculons la probabilité de l'évènement $R \cap M$.

$p(R \cap M) = p(R) \times p_R(M) = 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}03$.

c. Montrons que la probabilité qu'un client choisi au hasard achète un four à micro-ondes est égale à 0,165.

$p(M) = p(R) \times p_R(M) + p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(M) = 0{,}03 + 0{,}9 \times 0{,}15 = 0{,}03 + 0{,}135$.

Nous avons bien la réponse attendue.

d. La probabilité qu'un client choisi au hasard n'achète pas de réfrigérateur sachant qu'il a acheté un four à micro-ondes est notée $p_M\left(\overline{R}\right)$.

$p_M(\overline{R}) = \dfrac{p\left(\overline{R} \cap M\right)}{p(M)} = \dfrac{0{,}135}{0{,}165} = 0{,}818$.

Partie B

Un produit de nettoyage conditionné dans des flacons est aussi vendu par le magasin.
Le volume de produit contenu dans un flacon, en millilitres (mL), est modélisé par une variable aléatoire V. On admet que V suit une loi normale d'espérance 250 et d'écart type 5.
Pour procéder à un contrôle, on prélève un flacon au hasard dans le stock du magasin.

1. Donnons la probabilité que le volume de produit contenu dans le flacon prélevé soit compris entre 240 mL et 260 mL.

$p\,(240 \leqslant V \leqslant 260) = 0{,}9545$

On pouvait remarquer que $[240\,;\,260]$ est l'intervalle $[\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]$

2. Donnons la probabilité que le volume de produit contenu dans le flacon prélevé soit inférieur ou égal à 240 mL.

$p(V \leqslant 240) \approx 0{,}023$

En poursuivant la remarque précédente et vu la symétrie par rapport à la moyenne, $p(X \leqslant \mu - 2\sigma) = p(X \geqslant \mu + 2\sigma) = \dfrac{0{,}05}{2}$

EXERCICE 3 — 6 points

On s'intéresse à la population d'une ville et on étudie plusieurs modèles d'évolution de cette population.
En 2013, la population de la ville était de 15 000 habitants.

Partie A - Étude de deux modèles d'évolution

1. Hypothèse 1

En analysant l'évolution récente, on fait d'abord l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 1 000 habitants par an.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants pour l'année $(2013 + n)$.

On a ainsi $u_0 = 15000$.

a. u_1 représente le nombre d'habitants pour l'année 2014.

$u_1 = 15000 + 1000 = 16000$ et $u_2 = 16000 + 1000 = 17000$.

b. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 1 000 puisque chaque terme, sauf le premier, se déduit du précédent en ajoutant le même nombre.

c. Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r est $u_n = u_0 + (n)r$. $u_n = 15000 + 1000n$.

d. Selon ce modèle, la population en 2018 devrait être de 20 000 habitants. Le rang de l'année est 5, par conséquent nous avons $u_5 = 15000 + 1000 \times 5 = 20000$

e. Selon ce modèle, déterminons en quelle année la population devrait atteindre 30 000 habitants. Pour ce faire, résolvons $15000 + 1000n = 30000$

$15000 + 1000n = 30000 \iff n = \dfrac{30000 - 15000}{1000} = 15$

La population devrait atteindre 30 000 habitants en 2028 (2013+15).

2. Hypothèse 2

On fait à présent l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 4,7 % par an.

Le nombre d'habitants pour l'année (2013 $+n$) est modélisé par le terme v_n d'une suite géométrique. Ainsi $v_0 = 15000$.

a. À un taux d'évolution de 4,7 % correspond un coefficient multiplicateur de 1,047.
$v_1 = 15000 \times 1,047 = 15705$ et $v_2 = 15705 \times 1,047 \approx 16443$.

b. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,047.

c. Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times (q)^n$.
$u_n = 15000 \times (1,047)^n$ pour tout entier naturel n.

d. Selon ce modèle, le nombre d'habitants de la ville en 2028 est v_{15} puisque le rang de l'année est 15.
$v_{15} = 15000 \times 1,047^{15} \approx 29874$.

e. En examinant l'évolution de villes comparables à celle que l'on étudie ici, des experts ont estimé que sa population allait augmenter de 50 % en 15 ans. Le résultat trouvé à la question précédente n'est pas en accord avec les prévisions des experts car la population est quasiment multipliée par 2 soit une augmentation de près de 100 %.

Partie B - Analyse des résultats sur tableur

On utilise un tableur pour comparer l'évolution de la population suivant les deux modèles.
Les cellules sont au format « nombre à zéro décimale ».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	Rang	0	1	2	3	4	5	6	7
3	Population selon hypothèse 1	15 000							
4	Population selon hypothèse 2	15 000							

1. Une formule que nous pouvons saisir dans la cellule C3, pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes successifs de la suite (u_n) pour n variant de 1 à 7 est =B$3+1000

2. Une formule que nous pouvons saisir dans la cellule C4, pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes successifs de la suite (v_n) pour n variant de 1 à 7 est =B$4*1,047

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[4\,;\,16]$ par : $f(x) = -x + 20 - \dfrac{64}{x}$.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Déterminons $f'(x)$. $f'(x) = -1 - 64\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = \dfrac{-x^2 + 64}{x^2}$. Par conséquent pour tout x de l'intervalle $[4\,;\,16]$, nous avons bien : $f'(x) = \dfrac{64 - x^2}{x^2}$.

2. a. Étudions le signe de $64 - x^2$.
$64 - x^2 = (8 + x)(8 - x)$. $\dfrac{x+8}{x^2}$ est strictement positif sur l'intervalle $[4\,;\,16]$, par conséquent $f'x)$ est du signe de $8 - x$.
Sur $\mathbb{R}$, $8 - x > 0 \iff x < 8$.
Il en résulte que le tableau de signes de f' sur l'intervalle $[4\,;\,16]$ est :

x	4		8		16
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

b. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Sur $]8\ ;\ 16]$, $f'(x) < 0$ par conséquent la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Sur $[4\ ;\ 8[$, $f'(x) > 0$, par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
Dressons le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;\,16]$

x	4		8		16
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Partie B

Une entreprise produit et commercialise entre 4 et 16 tonnes d'engrais par jour.
On admet que toute sa production est vendue.
Le bénéfice total (exprimé en centaines d'euros) réalisé pour une production de x tonnes d'engrais, est modélisé à l'aide de la fonction B définie par :

$$B(x) = -x^2 + 20x - 64$$

1. En étudiant les variations de la fonction B sur l'intervalle $[4\,;\,16]$ déterminons la production permettant de réaliser un bénéfice total maximal.
Déterminons $B'(x)$. $B'(x) = -2x + 20$
$B'(x) < 0 \iff x > 10$ et $B'(x) > 0 \iff x < 10$.
La fonction étant croissante sur $[4\,;\,10[$ et décroissante sur $]10\,;\,16]$, B admet un maximum en $x = 10$.
La production permettant un bénéfice maximum est de 10 tonnes.
Le bénéfice total est de 3 600 €. $(-10^2 + 20 \times 10 - 64 = 36)$.

2. Le bénéfice unitaire pour une production de x tonnes d'engrais est donné par $\dfrac{B(x)}{x}$.
Le bénéfice total et le bénéfice unitaire sont-ils maximaux pour la même production d'engrais ?
Non, car le bénéfice total est obtenu pour une production de 10 tonnes et rapporte 3 600 € tandis que le bénéfice unitaire est obtenu pour une production de 8 tonnes et rapporte 400 €.