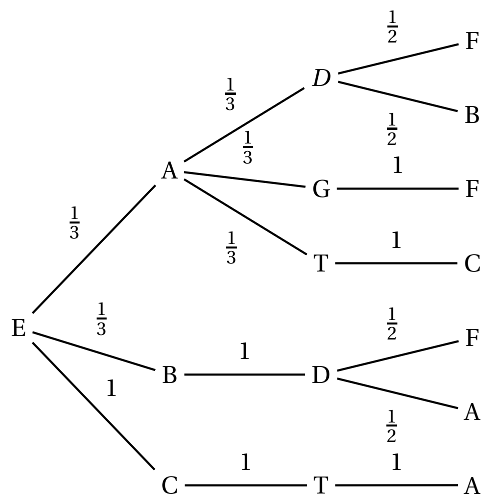
∽ Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers ∽ juin 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Enseignement obligatoire et de spécialité

1. a.



b. On a $p(\text{EBDF}) = p_{\text{B}} \times p_{\text{B}}(\text{D}) \times p_{\text{D}}(\text{F}) = \dfrac{1}{3} \times 1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.

c. On a $p(\text{EADF}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{18}$.

On a $p(\text{EAGF}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{9}$.

Donc la probabilité que la quatrième salle du trajet soit F est égale à :

$p_1 = p(\text{EADF}) + p(\text{EBDF}) + p(\text{EAGF}) = \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{1+3+2}{9 \times 2} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$.

d. $p_2 = p(\text{EATC}) + p(\text{ECTA}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times 1 + \dfrac{1}{3} \times 1 \times 1 = \dfrac{4}{9}$.

2. a. La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{4}{9}$.

On a donc $p(\text{X}) = 1 = 1 \times \dfrac{4}{9} \times \left(1 - \dfrac{4}{9}\right)^{10-1} = \dfrac{4}{9} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^{9} \approx 0{,}002\,241$.

b. On a $p(\text{X} = 0) + p(\text{X} = 1) = \left(\dfrac{5}{9}\right)^{10} + 10 \times \dfrac{4}{9} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^{9} \approx 0{,}025\,207$.

Donc $p(\text{X}) \geqslant 2) = 1[p(\text{X} = 0) + p(\text{X} = 1)] \approx 0{,}974\,8 \approx 0{,}975$ au millième près.

c. Dans ces nouvelles conditions la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{3}$.

On a donc $p(\text{X}) < 2) = p(\text{X} = 0) + p(\text{X} = 1) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10} + 10 \times \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{9} \approx 0{,}104\,1$, donc :

$p(\text{X}) \geqslant 2) \approx 0{,}895\,9 \approx 0{,}896$. La probabilité est plus faible : il a tort.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. **a.** Calculons $a+b+c = -\dfrac{1}{2}\sin 2t + \dfrac{2}{3}\cos t + \dfrac{2}{3} + \sin 2t - \dfrac{1}{3}\cos t + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2}\sin 2t - \dfrac{1}{3}\cos t + \dfrac{2}{3} = 3 \times \dfrac{2}{3} = 2 \neq 0$, donc le barycentre existe quel que soit le réel t.

b. On a par définition :

$a\overrightarrow{G(t)\mathrm{A}} + b\overrightarrow{G(t)\mathrm{B}} + c\overrightarrow{G(t)\mathrm{C}} = \overrightarrow{0} \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcl} (2-x(t))\left(-\dfrac{1}{2}\sin 2t + \dfrac{2}{3}\cos t + \dfrac{2}{3}\right) + (0-x(t))\left(\sin 2t - \dfrac{1}{3}\cos t + \dfrac{2}{3}\right) + (-2-x)\left(-\dfrac{1}{2}\sin 2t - \dfrac{1}{3}\cos t + \dfrac{2}{3}\right) & = & 0 \\ \left(0-y(t)\right)\left(-\dfrac{1}{2}\sin 2t + \dfrac{2}{3}\cos t + \dfrac{2}{3}\right) + \left(2-y(t)\right)\left(\sin 2t - \dfrac{1}{3}\cos t + \dfrac{2}{3}\right) + \left(-2-y(t)\right)\left(-\dfrac{1}{2}\sin 2t - \dfrac{1}{3}\cos t + \dfrac{2}{3}\right) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x(t) & = & 2\cos t \\ 2y(t) & = & 3\sin 2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos t \\ y(t) & = & \dfrac{3}{2}\sin 2t \end{array}\right. .$$

2. Étude des symétries de la courbe (Γ)

a. On a $\cos(t+2\pi) = \cos t$ et $\sin(2(t+2\pi)) = \sin(2t+4\pi) = \sin 2t$, donc $x(t+2\pi) = x(t)$ et $t(t+2\pi) = y(t)$: on a $G(t+2\pi) = G(2\pi)$.

b. On a $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$: les points $G(-t)$ et $G(t)$ sont symétriques autour de l'axe des abscisses.

c. On a $\cos(\pi - t) = -\cos t$ et $\sin[2(\pi - t)] = \sin(-2t) = \sin 2t$: les points $G(\pi - t)$ et $G(t)$ sont symétriques par rapport à O.

d. La question précédente montre que l'on peut étudier la fonction sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, d'en déduire le tracé sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ par symétrie autour de O, puis de construire la courbe par symétrie de la partie de courbe précédente par symétrie autour de l'axe des abscisses. On aura donc un tracé sur un intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ de longueur 2π. Ce tracé peut être complété par translations de vecteur $2\pi\,\overrightarrow{\imath}$.

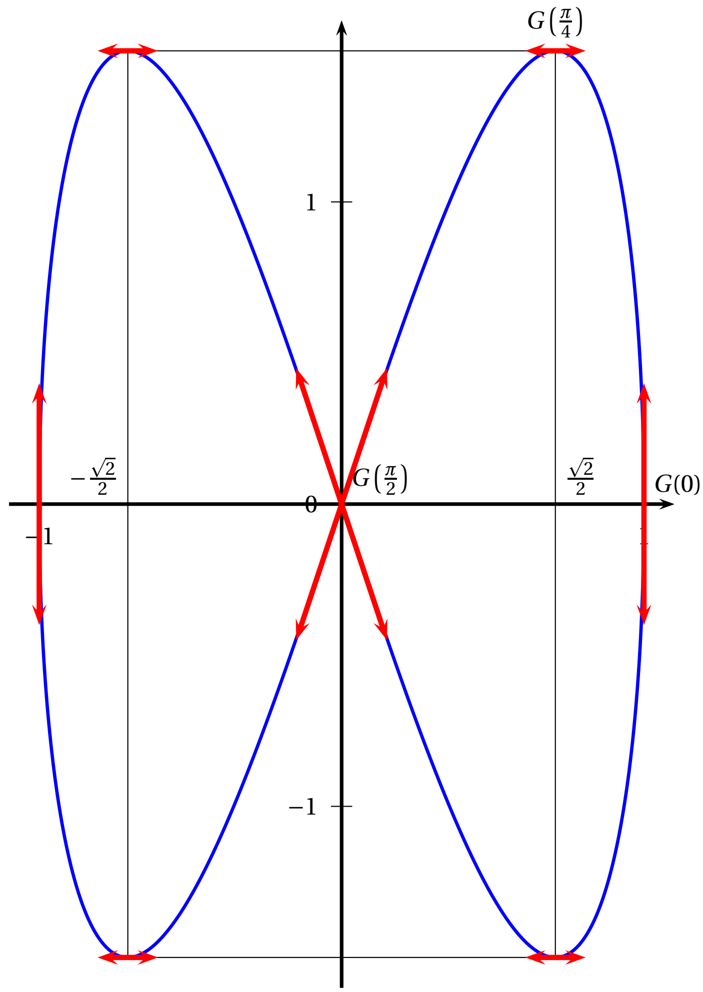
3. **a.** La fonction cos est décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$: la fonction $t \longmapsto \sin(2t)$ est croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. D'où le tableau :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$2t$	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

b. En tout point $G(t)$ la courbe (Γ) a une tangente $\overrightarrow{t}\,(x'(t)\,;\,y'(t))$.

- $\overrightarrow{t_0}\,(x'(0) = 0\,;\,y'(0) = 3)$
- $\overrightarrow{t_{\frac{\pi}{4}}}\,(x'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,y'(0) = 0)$
- $\overrightarrow{t_{\frac{\pi}{2}}}\,(x'(\frac{\pi}{2}) = -1\,;\,y'(\frac{\pi}{2}) = -3)$

c.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. On a : $J_1 = J_0 + 105u = J_0 + 6 + 81v \iff 105u - 81v = 6 \iff 35u - 27v = 2$ (après simplification par 3).
2. **a.** On a $35 = 5 \times 7$ et $27 = 3^3$, donc 35 et 27 sont premiers entre eux.
   On a successivement :
   $35 = 27 \times 1 + 8$;
   $27 = 8 \times 3 + 3$;
   $8 = 3 \times 2 + 2$;
   $3 = 2 \times 1 + 1$, d'où en remontant les calculs :
   $1 = 3 - 2 \times 1 = 3 - (8 - 3 \times 2) = 3 \times 3 - 8 = 3(27 - 3 \times 8) - 8 = 3 \times 27 - 10 \times 8 = 3 \times 27 - 10(35 - 27)$, soit enfin :
   $35 \times (-10) + 27 \times 13 = 1 \iff 35 \times (-10) - 27 \times (-13) = 1$.
   Le couple $(-10\,;\,-13)$ est solution de (E_2).

   b. On déduit du résultat précédent en multipliant par 2 que :
   $35 \times (-20) - 27 \times (-26) = 2$: le couple $(-20\,;\,-26)$ est une solution de l'équation (E_1).

c. $\begin{cases} 35x-27y & = & 2\\ 35\times(-20)-27\times(-26) & = & 2\end{cases} \Longrightarrow$ (par différence) $35(x+20)-27(y+26)=0 \iff$ $35(x+20)=27(y+26)$.

27 divise donc $35(x+20)$, mais comme il est premier avec 35, d'après Gauss il divise $x+20$.
Il existe donc $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x+20=27k$ ou
$x=27k-20$.
On en déduit que $35\times 27k=27(y+26) \iff 35k=y+26 \iff y=35k-26$.
Les solutions de (E_1) sont tous les couples d'entiers $(27k-20\,;\,35k-26)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

d. Il faut trouver les entiers u et v les plus petits possibles; ils sont obtenus pour $k=1$ qui donne le couple $(7\,;9)$.

3. **a.** $J_1=J_0+105\times 7=J_0+735$. Il s'écoulera 735 jours.

b. Jusqu'à fin décembre 1999, il s'écoulera 24 jours en 2000, en 2000, 366 jours , soit 390 jours. iIl s'écoulera en 2001, $735-390=345$ soit une année moins 20 jours, donc le 11 décembre 2001 qui sera aussi un mardi puisque $735=700+35=7\times 105$ soit un nombre entier de semaines.

c. Les prochains jours de conjonction seront :
$J_0+105u=J_0+105(27k-20)=J_0-2\,100+2\,835k$.
Le prochain jour sera obtenu pour $k=2$ qui donne :
$J_0-2\,100+2\,835\times 2=3\,570$.
Or $3\,570=735$ (première attente) $+2\,835$.
Il devra donc attendre 2 835 jours de plus.

PROBLÈME **10 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a $h'(x)=r\mathrm{e}^{rx}$, puis $h''(x)=r^2\mathrm{e}^{rx}$.
h est solution de (E) si et seulement si :
$r^2\mathrm{e}^{rx}-\mathrm{e}^{rx}=0 \iff \mathrm{e}^{rx}\left(r^2-1\right)=0 \iff r^2-1=0 \iff r=-1$ ou $r=1$.
Les fonctions $x\longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $x\longmapsto \mathrm{e}^{-x}$sont solutions de (E).

2. $\varphi(x)=\alpha\mathrm{e}^{x}+\beta\mathrm{e}^{-x}$, donc $\varphi'(x)=\alpha\mathrm{e}^{x}-\beta\mathrm{e}^{-x}$ et $\varphi''(x)=\alpha\mathrm{e}^{x}+\beta\mathrm{e}^{-x}$, donc
φ est solution de (E) si et seulement si :
$\varphi''(x)-\varphi(x)=0 \iff \alpha\mathrm{e}^{x}+\beta\mathrm{e}^{-x}-\alpha\mathrm{e}^{x}-\beta\mathrm{e}^{-x}=0$ qui est bien vraie.

3. On a donc :

$$\begin{cases}\varphi(x) & = & \alpha\mathrm{e}^{x}+\beta\mathrm{e}^{-x}\\ \dfrac34 & = & \alpha\mathrm{e}^{\ln 2}+\beta\mathrm{e}^{-\ln 2}\\ \dfrac54 & = & \alpha\mathrm{e}^{x}-\beta\mathrm{e}^{-\ln 2}\end{cases} \iff \begin{cases}\varphi(x) & = & \alpha\mathrm{e}^{x}+\beta\mathrm{e}^{-x}\\ \dfrac34 & = & 2\alpha+\dfrac12\beta\\ \dfrac54 & = & 2\alpha-\dfrac12\beta\end{cases} \iff$$

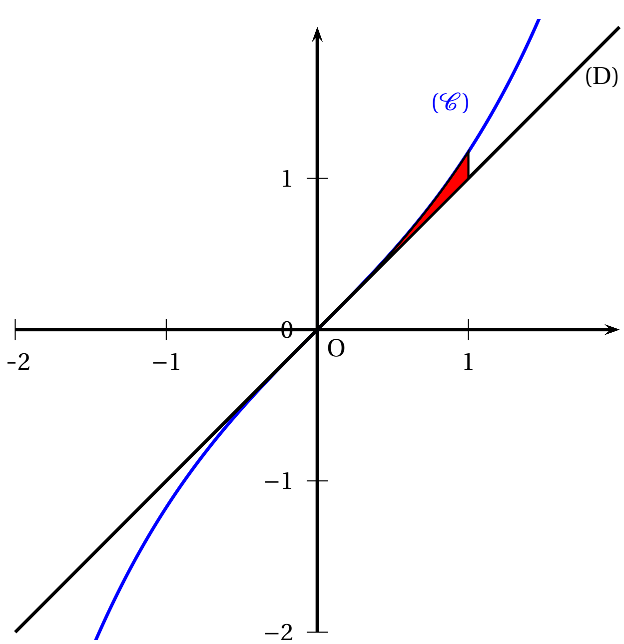
$$\begin{cases}\varphi(x) & = & \alpha\mathrm{e}^{x}+\beta\mathrm{e}^{-x}\\ \dfrac34 & = & 2\alpha+\dfrac12\beta\\ 2 & = & 4\alpha\end{cases} \iff \begin{cases}\varphi(x) & = & \alpha\mathrm{e}^{x}+\beta\mathrm{e}^{-x}\\ \dfrac34 & = & 2\alpha+\dfrac12\beta\\ \dfrac12 & = & \alpha\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}\varphi(x) & = & \alpha\mathrm{e}^{x}+\beta\mathrm{e}^{-x}\\ \dfrac34 & = & 1+\dfrac12\beta\\ \dfrac12 & = & \alpha\end{cases} \iff \begin{cases}\varphi(x) & = & \alpha\mathrm{e}^{x}+\beta\mathrm{e}^{-x}\\ -\dfrac12 & = & \beta\\ \dfrac12 & = & \alpha\end{cases}.$$

On a donc $\varphi(x)=\dfrac12\mathrm{e}^{x}-\dfrac12\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B

1. On a $f(x) = \mu \iff \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) = \mu \iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 2\mu \iff \mathrm{e}^{2x} - 1 = 2\mu\mathrm{e}^x \iff$
$\mathrm{e}^{2x} - 2\mu\mathrm{e}^x - 1 = 0$.
Soit, en posant $X = \mathrm{e}^x$, la fonction f_μ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f_\mu(X) = X^2 - 2\mu X - 1$; alors : $\Delta = 4\mu^2 + 4 = 4\left(1 + \mu^2\right) > 0$.
le trinôme a deux racines :
$$X_1 = \frac{2\mu + 2\sqrt{1+\mu^2}}{2} = \mu + \sqrt{1+\mu^2} \text{ et } X_2 = \mu - \sqrt{1+\mu^2}.$$
Comme $1 + \mu^2 > \mu^2$, on a $\sqrt{1+\mu^2} > \sqrt{\mu^2}$ ou $\sqrt{1+\mu^2} > |\mu|$.
On a donc $X_1 > 0$ et $X_2 < 0$, donc $X_1 = \mathrm{e}^{x_1} = \mu + \sqrt{1+\mu^2} \iff x_1 = \ln\left(\mu + \sqrt{1+\mu^2}\right)$.
Conclusion : l'équation $f(x) = \mu$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \ln\left(\mu + \sqrt{1+\mu^2}\right)$.
2. **a.** Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, par différence de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, par différence de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) > 0$, car somme de deux termes supérieurs à zéro. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$ de moins l'infini à plus l'infini.
3. **a.** Une équation de (T) est $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.
Or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Une équation de (T) est donc $y = x$.
b. On a $d(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) - x = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x\right)$.
$d'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2\right) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}^x}\left(\mathrm{e}^{2x} + 1 - 2\mathrm{e}^x\right) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}^x}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^2$.
Donc $d'(x) \geqslant 0$ car produit de deux facteurs positifs. La fonction d est croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $d(0) = 0$, donc $d(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, c'est-à-dire que $(\mathscr{C})$ est au dessus de (D) pour $x > 0$ et $(\mathscr{C})$ est au dessous de (D) pour $x < 0$.
c.



4. L'aire de D est en unités d'aire l'intégrale de la fonction d ci-desssus entre 0 et 1, soit :
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}[\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - 1 - (1+1-0)] =$
$\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - 3\right)$ u. a.
Comme l'unité d'aire est égale à $2^2 = 4$ cm^2, l'aire de D est égale à :
$2\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - 3\right) \approx 0,172$ cm^2.

Partie C

1. a. On a donc $\varphi(x) = x + \displaystyle\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ ou
$\varphi(x) = x + \displaystyle\int_0^x (x\varphi(t) - t\varphi(t))\,\mathrm{d}t = x + \int_0^x x\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et enfin :
$\varphi(x) = x + x\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$
D'où $\varphi(0) = 0 + 0\displaystyle\int_0^0 \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^0 t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

b. On sait que $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de φ qui s'annule en 0 ; cette fonction est donc dérivable et sa dérivée est égale à φ ; même chose pour la deuxième intégrale ; donc en dérivant l'égalité de la question précédente :
$\varphi'(x) = 1 + 1\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + x\varphi(x) - x\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$
Donc $\varphi'(0) = 1 + \displaystyle\int_0^0 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1 + 0 = 1.$

c. En dérivant chaque membre de l'égalité précédente, on a :
$\varphi''(x) = 0 + \varphi(x) \iff \varphi''(x) - \varphi(x) = 0$ ce qui signifie que φ vérifie l'équation différentielle de départ. On sait que $\varphi(x) = \alpha\mathrm{e}^x + \beta\mathrm{e}^{-x}$ et on sait que :
$\begin{cases} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi'(0) &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha\mathrm{e}^0 + \beta\mathrm{e}^{-0} &= 0 \\ \alpha\mathrm{e}^0 - \beta\mathrm{e}^{-0} &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha - \beta &= 1 \end{cases} \implies 2\alpha = 1 \iff \alpha =$
$\dfrac{1}{2}$ puis $\beta = -\dfrac{1}{2}$.
On a donc $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.

2. a. Posons : $u(t) = t$ et $v'(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}$, d'où :
$u'(t) = 1$ et $v(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}$.
Toutes ces fonctions sont continues car dérivables, on peut donc intégrer par parties :
$\displaystyle\int_0^x t\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \left[t\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right)\right]_0^x - \int_0^x \left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \left[t\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right) - \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = x\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) -$
$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - [0 + 1 - 1] = x\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} =$
$\mathrm{e}^x(x-1) + \mathrm{e}^{-x}(x+1).$

b. On calcule donc $\varphi(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ avec $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$:
$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - \displaystyle\int_0^x (x-t)\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)\left[\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t =$
$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{x}{2}\displaystyle\int_0^x \left[\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x t\left[\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right]\mathrm{d}t =$
$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{x}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 1 - 1\right) + \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x(x-1) + \mathrm{e}^{-x}(x+1)\right] =$
$\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^x + \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^x + \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-x} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = x.$
La fonction f vérifie bien la relation (H).