

~ Corrigé du BTS Métropole mai 2021 ~
 Services informatiques aux organisations

Épreuve obligatoire

Exercice 1 : un problème de routage

5 points

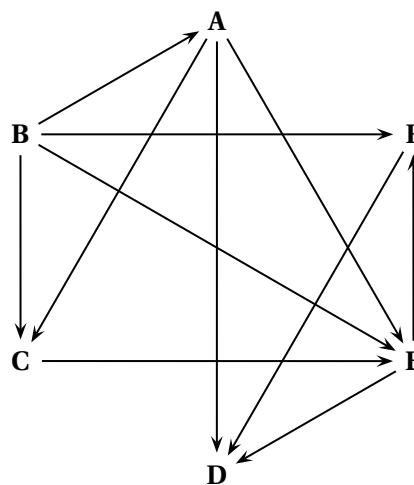
Partie A

On considère un réseau de commutation de paquets constitués de 6 routeurs A, B, C, D, E et F. Chaque paquet reçu par l'un des routeurs doit être acheminé vers un autre routeur, jusqu'à atteindre sa destination finale. Dans le tableau ci-dessous, on a résumé les règles de routage d'un routeur à un autre routeur.

Peut transmettre à	A	B	C	D	E	F
A			■	■	■	
B	■		■		■	■
C					■	
D						
E				■		■
F				■		

On considère le graphe simple orienté **G** constitué des sommets A, B, C, D, E et F. Les sommets représentent les routeurs. Si un sommet X peut transmettre un paquet vers un sommet Y alors on a l'arc : $X \rightarrow Y$.

On peut représenter ce graphe :



1. a. On complète le tableau des successeurs et des prédécesseurs du graphe **G** :

Sommets	Prédécesseurs	Successeurs
A	B	C - D - E
B	-	A - C - E - F
C	A - B	E
D	A - E - F	-
E	A - B - C	D - F
F	B - E	D

- b. La matrice d'adjacence M du graphe **G**, les sommets étant rangés par ordre alphabétique est :

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} \curvearrowright & A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2. a. La calculatrice donne :

$$M^3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \curvearrowright & A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- b. Le nombre de chemins de longueur 3 allant du sommet B (sommet n° 2) au sommet D (sommet n° 4) est le nombre de la matrice M^3 situé à l'intersection de la 2^e ligne et de la 4^e colonne; il s'agit du nombre 3 donc il y a 3 chemins de longueur 3 allant du sommet B au sommet D.

Ce sont : $B \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow D$, $B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D$ et $B \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D$.

3. a. La matrice de fermeture transitive de ce graphe est une matrice carrée d'ordre 6; on met un 1 à l'intersection de la ligne correspondant au sommet X et de la colonne correspondant au sommet Y s'il existe au moins un chemin allant du sommet X au sommet Y. Sinon on met un 0.

Le graphe **G** contient 6 sommets donc la matrice de fermeture transitive est $\widehat{M} = M \vee M^{[2]} \vee M^{[3]} \vee M^{[4]} \vee M^{[5]} \vee M^{[6]}$ où \vee désigne la somme booléenne, et $M^{[n]}$ la matrice booléenne de M^n , c'est-à-dire la matrice M^n dans laquelle on a remplacé chaque nombre non nul par un 1.

Pour obtenir \widehat{M} , il suffit de calculer $N = M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 + M^6$ et de remplacer dans la matrice N chaque nombre non nul par le nombre 1.

La calculatrice donne :

$$N = M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 + M^6 = \begin{matrix} & \curvearrowright & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} & \text{F} \\ \text{A} & & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ \text{B} & & 1 & 0 & 2 & 10 & 4 & 5 \\ \text{C} & & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ \text{D} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{E} & & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \text{F} & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

On obtient donc :

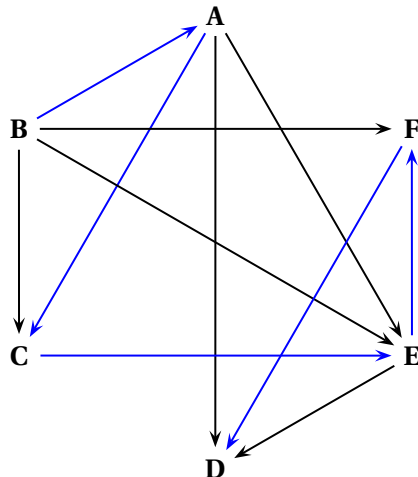
$$\widehat{M} = \begin{matrix} & \curvearrowright & \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} & \text{E} & \text{F} \\ \text{A} & & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{B} & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{C} & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \text{D} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{E} & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{F} & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

b. La 3^e ligne correspond au sommet C et la 6^e colonne au sommet F; le nombre 1 à l'intersection de la troisième ligne et la sixième colonne de \widehat{M} signifie qu'il y a au moins un chemin allant de C vers F.

En regardant la matrice N , on peut même dire qu'il n'y en a qu'un seul :
 $C \rightarrow E \rightarrow F$

4. Un chemin hamiltonien est un chemin qui passe une fois et une seule par tous les sommets.

Le chemin $B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D$ est hamiltonien.



Remarque : comme le sommet B n'a pas de prédécesseur, un chemin hamiltonien doit forcément commencer par B, et comme le sommet D n'a pas de successeur, il doit forcément se terminer par D.

Partie B

Dans un parc informatique, chaque machine connectée à un réseau peut être identifiée à l'aide d'une adresse IPv4.

1. a. Dans la base 2, un octet est constitué de 8 chiffres.
Le plus grand entier noté en base 10 qu'on peut écrire sous la forme d'un octet est le nombre décimal correspondant à $\overline{11111111}^2$ soit

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255.$$
- b. Une adresse IPv4 étant constituée de 4 octets notés en base 10 et séparés par un point, le nombre maximal d'adresses IPv4 qui peuvent être attribuées est

$$255^4 = 4\,228\,250\,625.$$

Le routeur C de la partie A gère les connexions réseaux d'un parc informatique de 8 machines étiquetées de 1 à 8.

Le DHCP de ce routeur est paramétré de telle façon qu'il attribue une plage de 49 adresses IPv4 allant de 192.168.1.2 jusqu'à 192.168.1.50.

Les 8 machines sont identifiées grâce aux adresses IPv4 suivantes :

Etiquette de la machine	Adresse IPv4 de la machine
1	192.168.1.2
2	192.168.1.4
3	192.168.1.12
4	192.168.1.49
5	192.168.1.48
6	192.168.1.50
7	192.168.1.5
8	192.168.1.6

2. Le premier octet commun s'écrit en décimal 192; on écrit 192 en binaire puis en hexadécimal.

$$192 = 128 + 64 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = \overline{11000000}^2$$

$$192 = 12 \times 16 + 0 \times 16^0 = \overline{C0}^{16}$$

Exercice 2**5 points**

Le spam, courriel indésirable ou pourriel, est une communication électronique non sollicitée, en premier lieu via le courrier électronique. Il s'agit en général d'envois en grande quantité effectués à des fins publicitaires.

Un étudiant en BTS SIO a développé un logiciel anti spam. Le filtre mis en place par l'étudiant se base sur les trois variables booléennes suivantes :

- a l'objet du message contient au moins un terme douteux (gratuit, offre, promotion, gagner ...), \bar{a} l'objet du message ne contient aucun terme douteux;

- b le corps du message contient des images ou des hyperliens, \bar{b} le corps du message ne contient ni images, ni hyperliens;
- c les messages de l'expéditeur sont rarement lus, \bar{c} les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment.

Avec ce logiciel, un courriel est considéré comme indésirable si :

- l'objet du message contient au moins un terme douteux avec un corps du message contenant des images ou des hyperliens;
ou
- l'objet du message ne contient aucun terme douteux et les messages de l'expéditeur sont rarement lus;
ou
- les messages de l'expéditeur sont rarement lus et le corps du message ne contient ni images, ni d'hyperliens;

1. Le « et » se traduit en produit et le « ou » se traduit en somme.

Donc :

- l'objet du message contient au moins un terme douteux (appelé a) avec un corps du message contenant des images ou des hyperliens (appelé b), se traduit en $a.b$,
- ou, se traduit par +,
- l'objet du message ne contient aucun terme douteux (appelé \bar{a}) et les messages de l'expéditeur sont rarement lus (appelé c), se traduit en $\bar{a}.c$;
- ou, se traduit par +,
- les messages de l'expéditeur sont rarement lus (appelé c) et le corps du message ne contient ni images, ni d'hyperliens (appelé \bar{b}), se traduit en $\bar{b}.c$.

Donc $E = a.b + c.\bar{a} + \bar{b}.c$.

2. a. On présente E dans une table de Karnaugh.

$a.b$	$\bar{a}.c$	$\bar{b}.c$																																													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: none;">$a \backslash bc$</td><td>00</td><td>01</td><td>11</td><td>10</td></tr> <tr><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>	$a \backslash bc$	00	01	11	10	0					1			1	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: none;">$a \backslash bc$</td><td>00</td><td>01</td><td>11</td><td>10</td></tr> <tr><td>0</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	$a \backslash bc$	00	01	11	10	0		1	1		1					<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: none;">$a \backslash bc$</td><td>00</td><td>01</td><td>11</td><td>10</td></tr> <tr><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table>	$a \backslash bc$	00	01	11	10	0		1			1		1		
$a \backslash bc$	00	01	11	10																																											
0																																															
1			1	1																																											
$a \backslash bc$	00	01	11	10																																											
0		1	1																																												
1																																															
$a \backslash bc$	00	01	11	10																																											
0		1																																													
1		1																																													

$$E = a.b + \bar{a}.c + \bar{b}.c$$

$a \backslash bc$	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	1

- b. Un courriel, ayant comme objet « promotion : une réduction de 50 % ... » (appelé a), et dont les messages de l'expéditeur sont lus fréquemment (appelé \bar{c}), est donc codé $a.\bar{c}$. On le représente dans une table de Karnaugh :

$$a.\bar{c}$$

	bc	00	01	11	10
a					
0					
1		1			1

En comparant avec la table de E , on peut ne pas considérer ce courriel comme indésirable.

- c. En utilisant la table de Karnaugh, on déduit l'expression simplifiée de E .

$$E = a.b + \bar{a}.c + \bar{b}.c$$

	bc	00	01	11	10
a					
0			1	1	
1			1	1	1

c

$a.b$

Donc $E = c + a.b$.

3. La règle E pour considérer un courriel comme indésirable est :

- Les messages de l'expéditeur sont rarement lus (c), ou (+)
- l'objet du message contient au moins un terme douteux (a) et (\times) le corps du message contient des images ou des hyperliens (b).

4. En partant de la table de Karnaugh de E , on écrit celle de \bar{E} par complément :

	bc	00	01	11	10
a					
0		1			1
1		1			

$\bar{b}.\bar{c}$

$\bar{a}.\bar{c}$

$$\text{Donc } \bar{E} = \bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.\bar{c}.$$

En utilisant les formules $\overline{(x + y)} = \bar{x}.\bar{y}$ et $\overline{(x.y)} = \bar{x} + \bar{y}$, on retrouve ce résultat :

$$\bar{E} = \overline{c + a.b} = \bar{c}.\overline{(a.b)} = \bar{c}.\overline{(a + \bar{b})} = \bar{c}.\bar{a} + \bar{c}.\bar{b}$$

Exercice 3 : Codage de Hill**5 points**

Dans le tableau suivant, on associe à chaque lettre de l'alphabet, en majuscule, son rang dans l'alphabet en commençant par 0.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Partie A

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Cette clé permet de chiffrer le mot « BUR » en « XMR ».

- Le message « JUA » correspond aux nombres 9 – 20 – 0, donc à la matrice $M = \begin{pmatrix} 9 & 20 & 0 \end{pmatrix}$.
 $M \times W = \begin{pmatrix} 49 & 38 & 69 \end{pmatrix}$ ce qui donne pour restes modulo 26 : $\begin{pmatrix} 23 & 12 & 17 \end{pmatrix}$.
 Cette matrice correspond à « XMR » donc le message chiffré est « XMR ».
- Les deux séquences « BUR » et « JUA » correspondent au même message chiffré « XMR » ; la clé de chiffrement n'est donc pas bonne.

Partie B

Dans cette partie, on considère la clé de chiffrement $W = \begin{pmatrix} 11 & n & 14 \\ 7 & 9 & 21 \\ 17 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, où n est un entier naturel compris entre 15 et 25.

On sait que cette clé permet de chiffrer le mot « GEL » en « VMT ».

- Le mot « GEL » correspond aux nombres 6 – 4 – 11 donc à la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 11 \end{pmatrix}$.
 $M \times W = \begin{pmatrix} 281 & 6n + 36 & 201 \end{pmatrix}$
 Le mot « VMT » correspond à 21 – 12 – 19 soit à la matrice $\begin{pmatrix} 21 & 12 & 19 \end{pmatrix}$.
 - $281 = 10 \times 26 + 21$ donc 281 correspond au nombre 21 donc à la lettre V ;
 - $201 = 7 \times 26 + 19$ donc 201 correspond au nombre 19 donc à la lettre T ;
 Pour que « GEL » se code en « VMT », il faut donc que $6n + 36$ corresponde à la lettre M, donc corresponde au nombre 12 ; il faut donc que $6n + 36 \equiv 12 \pmod{26}$.
- On cherche tous les restes de la division de $6n + 36$ dans la division par 26, pour n variant entre 15 et 25 :

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$6n + 36$	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	186
restes	22	2	8	14	20	0	6	12	18	24	4

Pour $n = 22$, on a : $6n + 36 \equiv 12 \pmod{26}$, donc la valeur de n cherchée est 22.