

☞ Corrigé du baccalauréat Nouvelle-Calédonie 27 octobre 2022 ☞

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 2

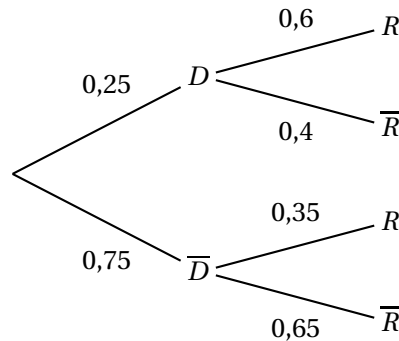
Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1

7 points

Principaux domaines abordés : Probabilités

1. a.



b. $p(\overline{D} \cap R) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = 0,2625$.

c. On a de même $p(D \cap R) = p(D) \times p_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(R) = p(D \cap R) + p(\overline{D} \cap R) = 0,15 + 0,2625 = 0,4125.$$

d. Il faut trouver $p_R(\overline{D}) = \frac{p(R \cap \overline{D})}{p(R)} = \frac{0,2625}{0,4125} \approx 0,6364$, soit 0,64 au centième près.

2. a. Les tirs sont indépendants et à chaque tir la probabilité de le réussir est égale à 0,35 : la variable aléatoire X égale au nombre de réussites suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,35$.

b. On a $E = np = 10 \times 0,35 = 3,5$: en moyenne sur 20 tirs Stéphanie en réussira 7.

c. La calculatrice donne $p(X \leq 6) \approx 0,97$.

d. On a de même $p(X \geq 6) \approx 0,095$.

3. La probabilité de rater n tirs à 3 points est égale à $0,65^n$, donc elle d'en réussir un est $1 - 0,65^n$.

Il faut donc résoudre dans \mathbb{N} , l'inéquation $1 - 0,65^n \geq 0,99 \iff 0,01 \geq 0,65^n$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

$$\ln 0,01 \geq n \ln 0,65 \iff \frac{\ln 0,01}{\ln 0,65} \leq n \text{ (car } \ln 0,65 < 0 \text{)}.$$

Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,65} \approx 10,69$; le plus petit naturel solution est donc 11 : Stéphanie doit tenter 11 tirs.

EXERCICE 2

7 points

Principaux domaines abordés : fonctions, fonction logarithme.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

1. a. Somme de produits de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, f est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$$

- b. On a $f(e) = e \ln e - e - 2 = -2$.

$$\text{De plus } f'(e) = \ln e = 1.$$

$$\text{On sait que } M(x; y) \in (T) \iff y - (-2) = 1(x - e) \iff y = x - 2 - e.$$

- c. De $f'(x) = \ln x$, on en déduit que $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Comme $x > 0$, on a donc $f''(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$: la fonction f est donc convexe sur cet intervalle.

- d. Le résultat précédent montre que la courbe \mathcal{C}_f est au dessus de la tangente T .

2. a. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, que $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$

- b. On a pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, on peut écrire :

$$f(x) = x[\ln(x) - 1] - 2.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, on a par produit de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. On a $f'(x) = \ln x$. On sait que :

- sur $]0; 1[$, $\ln x < 0$: donc f décroît sur cet intervalle;
- sur $]1; +\infty[$, $\ln x > 0$: donc f croît sur cet intervalle;
- $f(1) = -1 - 2 = -3$ est donc le minimum de f sur $]0; +\infty[$.

D'où le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
		-	+
f	-2		$+\infty$
		-3	

4. a. Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $]1; +\infty[$, f est strictement croissante de -3 à plus l'infini.

f étant continue car dérivable, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe un réel unique α de $]1; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

- b. On a $f(4,3) \approx -0,028$ et $f(4,4) \approx 0,119$.

D'après le même théorème ceci montre que $\alpha \in]4,3; 4,4[$.

c. Conclusion :

- sur $]0; \alpha[$, $f(x) < 0$;
- sur $] \alpha; +\infty[$, $f(x) > 0$;
- $f(\alpha) = 0$.

La fonction seuil(0.01) renvoie la valeur 4,32.

Ceci donne l'encadrement de α au centième près : $4,32 < \alpha < 4,33$.

EXERCICE 3

7 points

Principaux domaines abordés : géométrie dans l'espace

Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'une pyramide EFGHS.

On a $DC = 6$, $DA = DH = 4$.

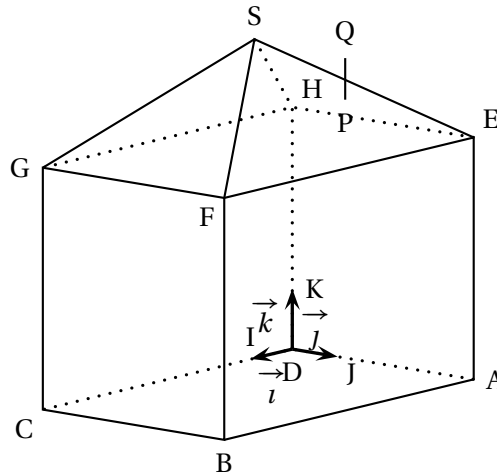
Soit les points I, J et K tels que

$$\vec{DI} = \frac{1}{6}\vec{DC}, \quad \vec{DJ} = \frac{1}{4}\vec{DA}, \quad \vec{DK} = \frac{1}{4}\vec{DH}.$$

On note $\vec{i} = \vec{DI}$, $\vec{j} = \vec{DJ}$, $\vec{k} = \vec{DK}$.

On se place dans le repère orthonormé $(D; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On admet que le point S a pour coordonnées $(3; 2; 6)$.



1. $B(6; 4; 0)$, $E(0; 4; 4)$, $F(6; 4; 4)$, $G(6; 0; 4)$.

2. On a $\mathcal{A}(EFGH) = 6 \times 4 = 24$.

La hauteur de la pyramide est égale à $6 - 4 = 2$, donc :

$$V(EFGHS) = \frac{1}{3} \times 24 \times 2 = 16.$$

D'autre part $V(ABCDEFGH) = 6 \times 4 \times 4 = 96$.

Le volume de la maison est donc égal à $16 + 96 = 112$.

$$\text{Or } \frac{V(EFGHS)}{V(\text{maison})} = \frac{16}{112} = \frac{1}{7}.$$

3. a. On a $\vec{EF} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{ES} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{EF} \cdot \vec{n} = 6 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0 \text{ et}$$

$$\vec{ES} \cdot \vec{n} = 3 \times 0 - 2 \times 1 + 2 \times 1 = 0.$$

Le vecteur \vec{n} orthogonal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (EFS) est donc normal à ce plan.

b. Le résultat précédent montre que :

$$M(x; y; z) \in (\text{EFS}) \iff 0x + 1y + 1z = d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or, par exemple } E(0; 4; 4) \in (\text{EFS}) \iff 0 + 4 + 4 = d \iff d = 8.$$

$$\text{On a donc } M(x; y; z) \in (\text{EFS}) \iff y + z = 8.$$

4. a. On a $M(x; y; z) \in (PQ) \iff \overrightarrow{QM} = t \vec{k}, (t \in \mathbb{R}) \iff \begin{cases} x-2 & = 0t \\ y-3 & = 0t \\ z-5,5 & = 1t \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} x & = 2 \\ y & = 3 \\ z & = 5,5+t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

b. Les coordonnées du point P vérifient les équations paramétriques de la droite (PQ) et du plan (EFS), donc du système :

$$\begin{cases} x & = 2 \\ y & = 3 \\ z & = 5,5+t \\ y+z & = 8 \end{cases} \Rightarrow 3+5,5+t=8 \iff t=-0,5.$$

Conclusion : P(2; 3; 5).

c. On a $PQ^2 = (2-2)^2 + (3-3)^2 + (5,5-5)^2 = 0,25$, donc $PQ = 0,5$.

5. Δ a pour vecteur directeur $\vec{\delta} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la droite (PQ) a pour vecteur directeur $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

Elles sont sécantes s'il existe un point $M(x; y; z)$ dont les coordonnées vérifient les équations des deux droites soit le système :

$$\begin{cases} x & = 2 \\ y & = 3 \\ z & = 5,5+t \\ x & = -4+6s \\ y & = 7-4s \\ z & = 2+4s \end{cases}$$

On en déduit (équations 1 et 4) que $2 = -4+6s \iff 6 = 6s \iff s = 1$ et (équations 3 et 6) que $5,5+t = 2+4 \iff t = 0,5$.

Il existe donc un point commun aux deux droites de coordonnées (2; 3; 4)

Reprenons les équations paramétriques de la droite (PQ) : $M(x; y; z) \in (PQ) \iff$

$$\begin{cases} x & = 2 \\ y & = 3 \\ z & = 5,5+t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$$

L'abscisse et l'ordonnée de tous les points de cette droite sont fixes, seule la cote varie de 5 pour P (correspondant à $t = -0,5$ à 5,5 pour Q (correspondant à $t = 0$); autrement dit les points du segment vérifient le système :

$$M(x; y; z) \in [PQ] \iff \begin{cases} x & = 2 \\ y & = 3 \\ z & = 5,5+t \end{cases}, (-0,5 \leq t \leq 0).$$

Le point commun aux deux droites correspond lui à $t = 0,5$, donc n'appartient pas au segment [PQ] : autrement dit l'oiseau ne va pas percuter l'antenne représentée par le segment [PQ].

EXERCICE 4

7 points

Principaux domaines abordés : suites, fonctions, primitives

1.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc puisque $n+1 \geq 1 > 0$ et que $\frac{1}{n+1} > 0$, on en déduit que pour tout naturel :

$$-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

La suite (u_n) encadrée par deux suites ayant pour limite 0 a pour limite 0.



Dans les questions 2 et 3, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation :

$$w_n = e^{-2v_n} + 2.$$

On a $w_0 = e^{-2v_0} + 2 = e^{-2\ln(a)} + 2 = \frac{1}{e^{2\ln(a)}} + 2 = \frac{1}{e^{\ln(a^2)}} + 2 = \frac{1}{a^2} + 2.$

2. On sait que la suite (v_n) est croissante. On peut affirmer que la suite (w_n) est :

On a successivement :

$v_n \leq v_{n+1} \Rightarrow 2v_n \leq 2v_{n+1} \Rightarrow -2v_{n+1} \leq -2v_n \Rightarrow e^{-2v_{n+1}} \leq e^{-2v_n}$ par croissance de la fonction exponentielle et enfin $e^{-2v_{n+1}} + 2 \leq e^{-2v_n} + 2$, soit $w_{n+1} \leq w_n$: la suite (w_n) est décroissante.

D'autre part on sait que quel que soit le réel α , $e^\alpha > 0$ donc la suite est minorée par 2.

3.

$$a_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}.$$

Soit la suite (b_n) définie pour tout naturel n par $b_n = a_n + \alpha$.

$$\text{Alors } b_{n+1} = a_{n+1} + \alpha = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3} + \alpha = \frac{1}{3}(b_n - \alpha) + \frac{8}{3} + \alpha = \frac{1}{3}b_n - \frac{\alpha}{3} + \frac{8}{3} + \alpha = \frac{1}{3}b_n + \frac{8+2\alpha}{3}.$$

Prenons $\alpha = -4$, alors $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$: cette égalité montre que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = a_0 + \alpha = 2 - 4 = -2$.

On sait qu'alors que, quel que soit le naturel n , $b_n = b_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Finalement $b_n = a_n - 4 \iff a_n = 4 + b_n = 4 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

4. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n , on a :

$$b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right).$$

On a quel que soit le naturel n , $b_{n+1} - b_n = \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right)$.

Or quel que soit le réel b_n , $b_n^2 \geq 0$, donc $(b_n)^2 + 3 \geq 3 > 2$, donc $\frac{2}{(b_n)^2 + 3} < 1$ et enfin

$$\ln\left(\frac{2}{(b_n)^2 + 3}\right) < 0.$$

Conclusion : $b_{n+1} - b_n < 0$ montre que la suite (b_n) est décroissante.

5.

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

- Au voisinage de zéro : $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$: géométriquement l'axe des ordonnées est asymptote verticale à \mathcal{C}_g .
- Au voisinage de plus l'infini : on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, donc pas d'asymptote.

6.

$$f(x) = xe^{x^2+1}.$$

En posant $u(x) = x^2 + 1$, on a $u'(x) = 2x$ et l'on peut écrire $f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2+1} = \frac{1}{2} u' e^u$:

on reconnaît la dérivée de $\frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$.

Donc $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$.