Corrigé du baccalauréat spécialité Polynésie 5 mai 2022

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 7 points **Thèmes : fonctions, primitives, probabilités**

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1.$$

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme somme et produit de fonctions dérivables.

On a alors $f'(x) = 1\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$ soit la réponse a.

2. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2[1 - \ln(x)]$.

On peut écrire $g(x) = x^2[1 - \ln(x)] = x^2 - x^2\ln(x)$.

On a :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$ d'après une propriété du cours sur les croissances comparées.

On aura donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ soit la réponse c.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0,9x^2 - 0,1x$.

$f(x) = x\left(x^2 - 0,9x - 0,1\right)$, donc

$f(x) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ x^2 - 0,9x - 0,1 & = & 0 \end{array}\right.$

Pour l'équation du second degré $x^2 - 0,9x - 0,1 = 0$, $\Delta = 0,81 + 0,4 = 1,21 = 1,1^2$.

Cette équation a donc deux solutions distinctes $x_2 = \dfrac{0,9 + 1,1}{2} = 1$ et $x_3 = \dfrac{0,9 - 1,1}{2} = -0,1$.

Conclusion l'équation a trois solutions : $-0,1$; 0 ; 1. Réponse d.

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

Pour montrer qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée, il suffit de la dériver.

Soit $K(x) = \dfrac{1}{2}H(2x)$.

K est dérivable comme composée de fonction dérivable et $K'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2H'(2x) = k(x)$.

car $H'(x) = h(x)$ car H est une primitive de h.

D'où la réponse c.

5. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\text{e}^x$ est :

   f est une fonction dérivable comme produit de fonction dérivable.

   La tangente en $x = 1$ aura alors comme équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

   $f(1) = \text{e}$ et comme $f'(x) = \text{e}^x + x\text{e}^x$, $f'(1) = 2\text{e}$.

   L'équation de la tangente est donc $y = 2\text{e}(x-1) + e$ ou $y = 2\text{e}x - 2\text{e} + \text{e}$ ou $y = 2\text{e}x - \text{e}$ soit la réponse b.

6. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $(0,2)^n < 0,001$ sont tous les nombres entiers n tels que :

   Il faut résoudre l'inéquation :

   $(0,2)^n < 0,001 \iff n\ln(0,2) < \ln(0,001) \iff n > \dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)}$.

   Or $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,2)} \approx 4,29$. Le plus petit entier vérifiant $n > 4,29$ est 5 d'où la réponse d.

EXERCICE 2 7 points **Thèmes : probabilités**

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les évènements suivants :

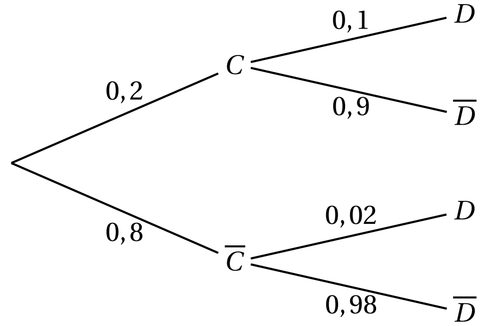
- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;
- $\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de C et D.

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

   Soit l'arbre pondéré suivant :



On a $P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$.

2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.

C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, d'après les probabilités totales,

$P(D) = p(C \cap D) + P\left(\overline{C} \cap D\right) = 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,02 = 0,02 + 0,016 = 0,036$.

3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

On cherche $P_D(C) = \dfrac{P(D \cap C)}{P(D)} = \dfrac{0,02}{0,036} = \dfrac{5}{9} \approx 0,556$.

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,\ p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.

Comme l'expérience est assimilé à un tirage avec remise, on peut considérer que les 35 tirages sont indépendants. Le succès est le casque a un défaut de conception, soit la probabilité $p = 0,036$. On a bien une loi binomiale de paramètre $n = 35$ et $p = 0,06$

b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.

On cherche $P(X = 1) = \binom{35}{1} 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{35} \approx 0,362$

c. Calculer $P(X \leqslant 1)$.

$P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = (1,036)^{35} + \binom{35}{1} 0,036^1 \times (1 - 0,036)^{35} \approx 0,639$.

2. Dans cette question, n n'est pas fixé.

Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à 0,99 ?

On veut $P(Y \geq 1) > 0,99 \iff 1 - P(Y = 0) > 0,99 \iff (1 - 0,036)^n < 0,01 \iff n\ln(0,964) < \ln(0,01) \iff n > \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,964)} \iff n > 125,6$ donc il faut commander au moins 126 casques.

Exercice 3 7 points **Thèmes : suites, fonctions**

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 40 \\ u_{n+} & = & 0,008u_n(200 - u_n) \end{array}\right.$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On calcule $u_1 = 0,008u_0(200 - u_0) = 51,2$ car le rang 1 correspond à la population d'oiseaux pour l'année 2022. On peut donc estimer qu'il y aura 51 animaux au début de 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.

1. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,100]$ l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0,008x(200 - x) = x \\ &\iff x(0,008(200 - x) - 1) = 0 \\ &\iff x(0,6 - 0,008x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 75 \end{aligned}$$

$S = \{0\ ;\ 75\}$.

2. **a.** Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ et dresser son tableau de variations.

La fonction f est dérivable comme produit et sommes de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ 100]$.

$f'(x) = 0,008(200 - x) - 0,008x = -0,016x + 1,6$, d'où $f'(x) > 0 \iff 1,6 > 0,016x \iff x < 100$.

On a donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,100]$: la fonction f est croissante sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[0\,;\,100]$, la fonction f croît de $f(0) = 0$ à $f(100) = 80$.

b. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

Soit P_n la relation

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

Initialisation :

On a vu que $u_0 = 40$; $u_1 \approx 51$, on a donc $0 \leqslant 40 \leqslant 51,2 \leqslant 100$; P_0 est donc vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vraie, soit

$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100$

Par croissance de la fonction f sur $[0\ ;\ 100]$on a donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(100)$.

Comme $f(0) = 0$ et $f(100) = 80$, on a donc

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 80 < 100$ et enfin

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 100$

P_{n+1} est donc vraie.

Conclusion :

La propriété P_n est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence la propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

La suite est croissante est majorée par 100 : elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant 100$.

d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La fonction f est continue sur $[0\ ;\ 100]$ car elle est dérivable.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, la limite l de la suite est donc solution de l'équation $f(\ell) = \ell$ sur l'intervalle $[0\,;\,100]$.

D'après la question 2., $\ell = 0$ ce qui n'est pas possible puisque $u_0 = 40$, ou alors $\ell = 75$.

À long terme le nombre d'oiseaux plafonnera à 75.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
      n =n+1
      u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

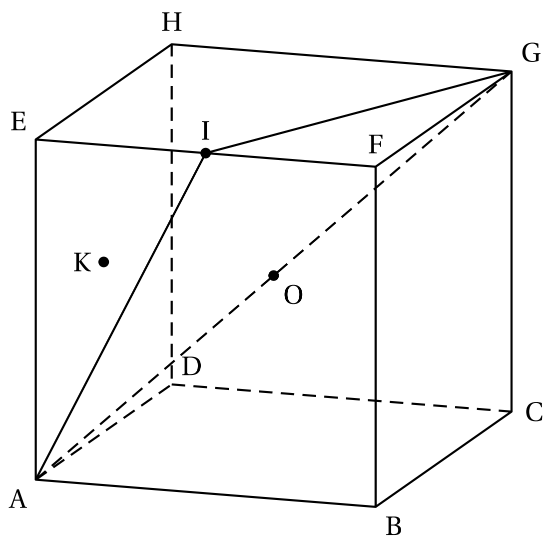
L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

Comme la limite de la suite est 75, toutes les valeurs de u_n seront inférieure à 75 et par conséquent à 100, l'exécution de seuil(100) « tournera » indéfiniment. La boucle while est donc infinie.

EXERCICE 4 7 points **Thèmes : géométrie dans le plan et dans l'espace**

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG].



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG).

Partie 1. Première méthode

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, et G.

A(0 ; 0 ; 0) ; B(1 ; 0 ; 0) et G(1 ; 1 ; 1)

On admet que les points I et K ont pour coordonnées $\text{I}\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$ et $\text{K}\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).

$\overrightarrow{\text{BK}}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\text{AI}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AI}}$ et $\overrightarrow{\text{AG}}$ ne sont pas colinéaires, le point G n'est pas un point de la droite (AI). Les points (AIG) forment donc un plan. on a de plus $\overrightarrow{\text{BK}} \cdot \overrightarrow{\text{AI}} = -1 \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times 0 + \dfrac{1}{2} \times 1 = 0$ et $\overrightarrow{\text{BK}}.\overrightarrow{\text{AG}} = -1 \times 1 + \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{1}{2} \times 1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{BK}}$ est donc un vecteur normal du plan (AIG)

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.

Comme $\overrightarrow{\text{BK}}$, le vecteur $2\overrightarrow{\text{BK}}$ est un vecteur normal au plan (AIG).

Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de ce plan, $\overrightarrow{\text{AM}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sera donc orthogonal à $2\overrightarrow{\text{BK}}$ et donc $2\overrightarrow{\text{BK}}.\overrightarrow{\text{AM}} = 0 \iff 2x - y - z = 0$

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK). Soit, $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de la droite (BK).

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{BK}) \iff \overrightarrow{\text{BM}} = t\overrightarrow{\text{BK}}\,;\, t \in \mathbb{R}$ d'où $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \quad -t \\ z = \quad -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $\text{L}\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

Montrons que le point L appartient à (BK) et à (AIG) :

$2 \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} = 0$ donc L appartient à (AIG).

En prenant $t = -\dfrac{1}{3}$ dans l'équation paramétrique de la droite (BK), on retrouve les coordonnées de L, qui est donc un point de (BK).

Comme (BK)$\perp$(AIG), L est le projeté orthogonal de B sur (AIG).

6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

$\overrightarrow{\text{BL}}\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\text{BL} = \sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

1. a. ABCDEFGH est un cube. L'arête [FG] est perpendiculaire au plan (ABF)

Le point I est un point de ce plan. Donc, dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB

b. En déduire le volume du tétraèdre ABIG.

$\mathcal{A}_{AIB} = \dfrac{\text{AB} \times \text{AE}}{2} = \dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et GF= 1

2. On admet que $\text{AI} = \text{IG} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et que $\text{AG} = \sqrt{3}$.

Le triangle AIG est isocèle en A, soit O le milieu du coté [AG] ; on aura $\text{AO} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le triangle AIO est rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore, on aura :

$\text{IO}^2 = \text{AI}^2 - \text{IO}^2 \iff \text{IO}^2 = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2} \iff \text{OI} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

L'aire du triangle AIG est donc égale à $\mathscr{A} = \dfrac{\text{OI} \times \text{AG}}{2} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).

Le volume du tétraèdre AIBG est égale à $\dfrac{1}{3}\mathscr{A}_{\text{AIB}} \times h = \dfrac{1}{6}$ avec h la longueur de la hauteur issue de B dans le tétraèdre AIBG.

On a alors $h = \dfrac{\dfrac{1}{6}}{\dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{6}}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$