

Baccalauréat Métropole 13 septembre 2021

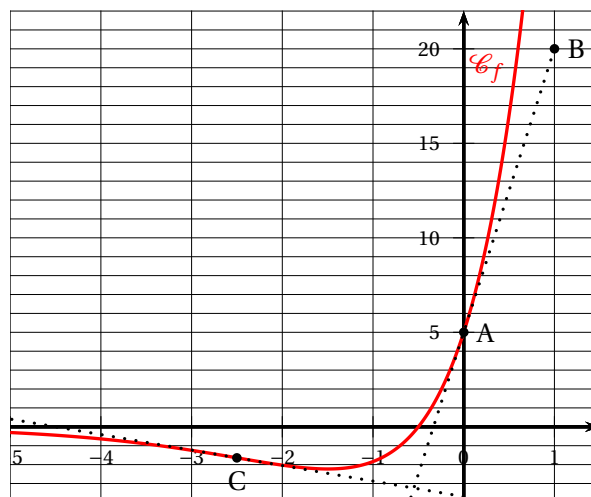
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Candidats libres

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats

4 points



1. On peut affirmer que :

a. $f'(-0,5) = 0$

Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $-0,5$ est manifestement positif Faux

b. si $x \in]-\infty; -0,5[$, alors $f'(x) < 0$

Le nombre dérivé s'annule en à peu près en $x = -1,5$ Faux

c. $f'(0) = 15$

Graphiquement $f'(0) = \frac{20-5}{1-0} = 15$ Vrai

d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur \mathbb{R}

f' est négative sur $]-\infty; -1,5[$ et positive sur $]-1,5; +\infty[$ Faux

2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur \mathbb{R} par

$f(x) = (ax + b)e^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5; 0)$.

On peut affirmer que :

a. $a = 10$ et $b = 5$

b. $a = 2,5$ et $b = -0,5$

c. $a = -1,5$ et $b = 5$

d. $a = 0$ et $b = 5$

Graphiquement $f(0) = 5 \iff be^0 = 5 \iff b = 5$;

D'autre part f est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :

$$f'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = e^x(ax + a + b).$$

On a vu que $f'(0) = 15 \iff a + b = 15 \iff a + 5 = 15 \iff a = 10$: la **réponse a.** est vraie.

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur par :

$$f''(x) = (10x + 25)e^x.$$

On peut affirmer que :

- a.** La fonction f est convexe sur \mathbb{R}
- b.** La fonction f est concave sur \mathbb{R}
- c.** Le point C est l'unique point d'inflexion de \mathcal{C}_f
- d.** \mathcal{C}_f n'admet pas de point d'inflexion

$f''(x) = 0 \iff (10x + 25)e^x = 0 \iff 10x + 25 = 0$ (car $e^x > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$); donc $f''(x) = 0 \iff x = -2,5$: C est donc l'unique point d'inflexion. **Réponse c.**

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur \mathbb{N} telles que :

- pour tout entier naturel n , $U_n \leq V_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

a. la suite (U_n) converge

Non car par exemple si $U_n = -n$ et $V_n = 2 + \frac{1}{n}$ ces deux suites vérifient l'énoncé et la suite (U_n) diverge;

b. pour tout entier naturel n , $V_n \leq 2$

Non avec $V_n = 2 + \frac{1}{n}$ on a $V_n \geq 2$;

c. la suite (U_n) diverge

Non avec par exemple $U_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $V_n = 2 + \frac{1}{n}$, les deux suites vérifient l'énoncé et la suite (U_n) converge;

d. la suite (U_n) est majorée

On sait, d'après le cours que toute suite convergente est bornée; donc la suite (V_n) est majorée et donc il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_n \leq M$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leq V_n$; on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \leq M$ et donc que la suite (U_n) est majorée. **Réponse d.**

Exercice 2 commun à tous les candidats**5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On a donc pour $n = 0$, $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$.

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$.

a. On veut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2.$$

Initialisation : on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$; de plus $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{4}{5} \leq 2$, donc :

$\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$: l'encadrement est vrai au rang 0;

Hérédité : on suppose que pour $n \geq 0$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

La fonction f étant croissante les images des quatre nombres ci-dessus sont rangées dans le même ordre, soit : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$.

Or on a vu que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ et on a $f(2) = \frac{8}{1+6} = \frac{8}{7}$;

de plus $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $\frac{4}{5} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{8}{7}$.

Or $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ et $\frac{8}{7} < 2$; on a donc finalement :

$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$: l'encadrement est donc vrai au rang $n + 1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \geq 0$, il est vrai au rang $n + 1$: par le principe de récurrence pour tout entier naturel n , on a :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2.$$

b. La suite (u_n) est croissante et elle majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que : $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 2$.

c. La fonction f est continue car dérivable au moins sur \mathbb{R}_+ donc la limite ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$; on résout cette équation :

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{4\ell}{1+3\ell} = \ell \iff 4\ell = \ell(1+3\ell) \iff 0 = \ell(1+3\ell-4)$$

$$\iff \ell(3\ell-3) = 0 \iff 3\ell(\ell-1) = 0 \iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ell - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ell = 1 \end{cases}$$

Comme $\ell \geq \frac{1}{2}$, la seule solution possible est 1 ; la suite (u_n) converge vers 1.

3. a. On complète la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E , détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$:

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while 1 - u >= E
        u = 4 * u / (1 + 3 * u)
        n = n + 1
    return n
```

b. On obtient $u_7 \approx 0,999939$, donc $1 - u_7 < 10^{-4}$. Le programme renvoie $n = 7$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

- a. Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$ soit en utilisant la définition de u_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1 - \frac{4u_n}{1+3u_n}} \text{ soit en multipliant chaque terme par } 1 + 3u_n :$$

$$v_{n+1} = \frac{4u_n}{1 + 3u_n - 4u_n} = \frac{4u_n}{1 - u_n} = 4 \frac{u_n}{1 - u_n} = 4v_n.$$

L'égalité, vraie pour tout naturel n , $v_{n+1} = 4v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 4, de premier terme $v_0 = \frac{u_0}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

On sait qu'alors, pour tout entier naturel n , $v_n = 1 \times 4^n = 4^n$.

- b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n} \iff v_n(1 - u_n) = u_n \iff v_n - u_n v_n = u_n \iff v_n = u_n v_n + u_n \iff v_n = u_n(v_n + 1).$$

Comme $v_n = 4^n$, $v_n \geq 1$, donc $v_n + 1 \geq 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$ et finalement en multipliant par $\frac{1}{v_n + 1}$, on obtient $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

- c. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4^n$, d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :

$$u_n = \frac{4^n}{4^n + 1} \text{ et en multipliant par } \frac{1}{4^n} :$$

$$u_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{4^n}}. \text{ Or } \frac{1}{4^n} = \frac{1^n}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0,25^n, \text{ d'où } u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}.$$

Comme $0 < 0,25 < 1$, on peut dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,25^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1 + 0} = 1$.

Exercice 3 commun à tous les candidats**6 points**

Les parties I et II peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.Soit f la fonction définie pour $t \in [0 ; 120]$ par :

$$f(t) = (0,04t^2 - 8t + 400) e^{\frac{t}{50}} + 40.$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t .1. Pour $t = 0$, $f(0) = 400 e^0 + 40 = 440$ (crapauds)2. Sur l'intervalle $[0 ; 120]$ en dérivant le produit :

$$\begin{aligned} f'(t) &= (0,08t - 8) e^{\frac{t}{50}} + \frac{1}{50} (0,04t^2 - 8t + 400) e^{\frac{t}{50}} = e^{\frac{t}{50}} \left[(0,08t - 8) + \frac{1}{50} (0,04t^2 - 8t + 400) \right] \\ &= e^{\frac{t}{50}} (0,08t - 8 + 0,0008t^2 - 0,16t + 8) = e^{\frac{t}{50}} (-0,08t + 0,0008t^2) \\ &= 0,0008 (t^2 - 100t) e^{\frac{t}{50}} = t(t - 100) e^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

3. On sait que quel que soit $t \in [0 ; 120]$, $e^{\frac{t}{50}} > 0$: le signe de $f'(t)$ est donc celui du trinôme $t(t - 100)$ qui est positif sauf sur l'intervalle $]0 ; 100[$ (entre les racines du trinôme).

$$f(0) = 480, f(100) = (400 - 800 + 400) e^{\frac{100}{50}} + 40 = 0 + 40 = 40 \text{ et}$$

$$f(120) = 576 - 960 + 400) e^{\frac{120}{50}} + 40 = 16e^{2,4} + 40 \approx 216,37.$$

On dresse le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0 ; 120]$:

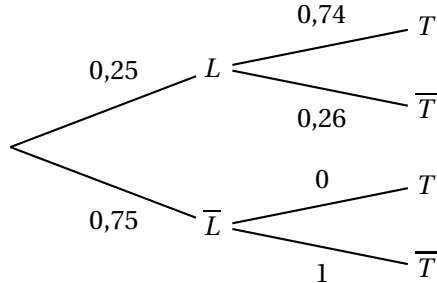
| | | | | | | |
|--------------|-----|---|-----|----|-----|--------|
| t | 0 | | 100 | | 120 | |
| $t(t - 100)$ | 0 | - | 0 | + | | |
| $f'(t)$ | 0 | - | 0 | + | | |
| f | 440 | ↘ | | 40 | ↗ | |
| | | | | | | 216,37 |

4. Selon cette modélisation :

- On a vu dans la question précédente que $f(100) = 40$ est le minimum de la fonction f , on a donc $J = 100$.
- On a aussi vu que de 100 jours à 120 jours le nombre de crapauds croît strictement de 40 à environ 216 : il dépassera donc 140 individus.
- Soit J_{140} la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus. La calculatrice donne :
 $f(115) \approx 130 < 140$ et $f(116) \approx 144 > 140$, donc $J_{140} = 116$.

Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

1. On complète l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(L \cap T) + P(\bar{L} \cap T) = P(L) \times P_L(T) + P(\bar{L}) \times P_{\bar{L}}(T) = 0,25 \times 0,74 + 0,75 \times 0 = 0,185$$

3. Le têtard n'est pas contaminé. La probabilité que le lac soit infecté est :

$$P_{\bar{T}}(L) = \frac{P(L \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,25 \times 0,26}{1 - 0,185} = \frac{0,065}{0,815} \approx 0,0797, \text{ soit } 0,080 \text{ au millième près.}$$

Exercice au choix du candidat

5 points

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé.

1. Dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$: $I\left(0; \frac{1}{4}; 1\right)$, $J\left(\frac{1}{4}; 0; 1\right)$, $K\left(1; 0; \frac{1}{4}\right)$.

2. On a $\vec{AG}(1; 1; 1)$, $\vec{IJ}\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; 0\right)$, $\vec{IK}\left(1; -\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

$$\text{Or } \vec{AG} \cdot \vec{IJ} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 0 = 0 \text{ et } \vec{AG} \cdot \vec{IK} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0.$$

Les vecteurs \vec{IJ} et \vec{IK} ne sont manifestement pas colinéaires, donc le vecteur \vec{AG} étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) est normal à ce plan.

3. D'après la question précédente on sait que : $M(x; y; z) \in (\text{IJK}) \iff 1x + 1y + 1z + d = 0$.

$$\text{Or par exemple } I\left(0; \frac{1}{4}; 1\right) \in (\text{IJK}) \iff 0 + \frac{1}{4} + 1 + d = 0 \iff 1 + 4 + 4d = 0 \iff 4d = -5 \iff d = -\frac{5}{4}.$$

$$\text{Finalement : } M(x; y; z) \in (\text{IJK}) \iff x + y + z - \frac{5}{4} = 0 \iff 4x + 4y + 4z - 5 = 0.$$

Le plan (IJK) a pour équation cartésienne $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.

4. On a $\overrightarrow{BC} (0; 1; 0)$. Donc :

$$M(x; y; z) \in (BC) \iff \overrightarrow{BM} = t \overrightarrow{BC} \text{ (avec } t \in \mathbb{R}) \iff \begin{cases} x-1 = t \times 0 \\ y-0 = t \times 1, \\ z-0 = t \times 0 \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = t, \\ z = 0 \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

La droite (BC) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 \\ y = t, \\ z = 0 \end{cases} t \in \mathbb{R}.$

5. Les coordonnées de $L(x; y; z)$ vérifient l'équation de (BC) et l'équation du plan (IJK)

donc le système : $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \\ 4x + 4y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$

ce qui donne en remplaçant x , y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation :

$$4 \times 1 + 4t + 4 \times 0 - 5 = 0 \iff 4t + 4 - 5 = 0 \iff 4t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{4}.$$

Les coordonnées de L sont donc $\left(1; \frac{1}{4}; 0\right)$.

6. Voir l'annexe.

L'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF) est le segment [KL].

L'intersection du plan (IJK) et du cube a été dessinée en tirets rouge.

7. Soit $M\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right)$.

Comme $L \in (IJK)$, il suffit de vérifier que M est aussi un point de ce plan, soit d'après le résultat de la question 4. :

$$4x_M + 4y_M + 4z_M - 5 = 4 \times \frac{1}{4} + 4 \times 1 + 4 \times 0 - 5 = 4 + 1 - 5 = 0 \text{ donc } M\left(\frac{1}{4}; 1; 0\right) \in (IJK).$$

Conclusion : les points I, J, K, L et M sont coplanaires.

Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme.

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}$.

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.

Par produit on déduit que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ et donc que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty$.

2. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$

3. La fonction h est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle : $h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

4. Comme $x^2 > 0$ pour $x \in]0; +\infty[$ le signe de $h'(x)$ est celui du numérateur $1 - \ln x$:

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff e > x$:
la fonction h est donc strictement croissante sur $]0; e[$;
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff e < x$:
la fonction h est donc strictement décroissante sur $]e; +\infty[$;
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff e = x$:
la fonction h a un maximum $f(e) = 1 + \frac{\ln e}{e} = 1 + \frac{1}{e}$.

D'où le tableau de variations de h :

| | | | |
|---------|-----------|-------------------|-----------|
| x | 0 | e | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | | 0 | |
| | | + | - |
| h | $-\infty$ | $1 + \frac{1}{e}$ | 1 |

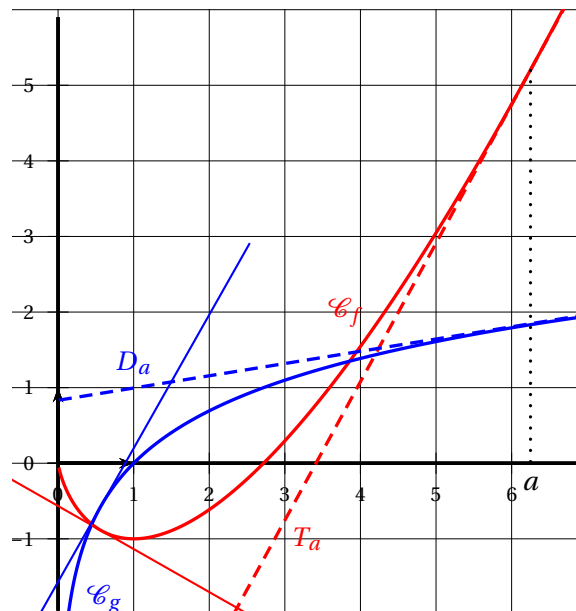
5. Comme $1 + \frac{1}{e} > 1 > 0$, le tableau de variations montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; e[$.

On a $f(1) = 1 + \frac{0}{1} = 1$, donc $0 < \alpha < 1$;

La calculatrice donne : $f(0,5) \approx -0,4$ et $f(0,6) \approx 0,15$, donc $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

Soit les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x) - x$ et $g(x) = \ln(x)$.



1. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

Donc le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f au point de la courbe d'abscisse a est égal à $f'(a) = \ln(a)$.

2. La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle : $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Donc le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_g au point de la courbe d'abscisse a est égal à $g'(a) = \frac{1}{a}$.

3. Le produit des coefficients directeurs est égal à -1 , soit :

$$\ln(a) \times \frac{1}{a} = -1 \iff \frac{\ln(a)}{a} = -1 \iff 1 + \frac{\ln(a)}{a} = 0 \iff h(a) = 0$$

et on a vu à la fin de la partie I que cette équation n'avait qu'une solution $a = \alpha$: il existe une seule valeur de a telle que les droites T_a et D_a sont perpendiculaires : $a = \alpha$. Voir la figure.

ANNEXE À COMPLÉTER ET À RENDRE AVEC LA COPIE
À COMPLÉTER SEULEMENT PAR LES ÉLÈVES AYANT CHOISI DE TRAITER
L'EXERCICE A

