Corrigé du baccalauréat STI2D – Spécialité

Métropole–La Réunion juin 2021

Physique-Chimie et Mathématiques

EXERCICE 1 **commun à tous les candidats** **4 points**

Le son est produit par la vibration d'objets et il arrive jusqu'à nos oreilles sous forme d'ondes se propageant dans l'air. Les sons sont perçus de manière plus ou moins intense.

L'intensité sonore, ou intensité acoustique notée I et exprimée en W.m^{-2}, caractérise l'intensité du signal perçue par l'oreille.

On calcule le niveau d'intensité sonore noté L en décibels (dB) à partir de l'intensité sonore notée I (W.m^{-2}) par la relation : $L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$.

On rappelle que $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2} (intensité sonore minimale de référence).

Partie A : onde sonore et intensité

Nos oreilles peuvent être endommagées irrémédiablement si le niveau d'intensité sonore et la durée d'exposition au bruit sont trop importants.

Une personne souhaite assister au décollage de la fusée Ariane sans protection auditive.

Données :

L'intensité acoustique du bruit généré par le décollage de la fusée Ariane vaut 10^2 W.m^{-2} à une distance de 100 m de la rampe de lancement.

Donc le niveau d'intensité sonore à une distance de 100 m de la rampe de lancement est :

$L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 10\log\left(\dfrac{10^2}{10^{-12}}\right) = 10\log\left(10^{14}\right) = 10 \times 14 = 140$ dB.

On considère, pour simplifier, que l'oreille humaine ne subit pas de dommage pour un son dont le niveau d'intensité sonore ne dépasse pas 100 dB, pendant une durée d'exposition ne dépassant pas quatre minutes par jour ; il faut donc que la distance soit suffisamment grande pour que le niveau d'intensité sonore baisse de 40 dB.

Le niveau d'intensité sonore diminue de 20 dB lorsque la distance par rapport à la source est multipliée par 10 ; il faut donc multiplier par 100 la distance pour que le niveau sonore diminue de 40 dB. La distance minimale à respecter est donc en mètre de 100×100 soit 10 km.

Partie B : étude mathématique

a. $L = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) \iff \dfrac{L}{10} = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) \iff 10^{\frac{L}{10}} = \dfrac{I}{I_0} \iff I = I_0 \times 10^{\frac{L}{10}}$

b. Pour $L = 50$ l'intensité sonore est : $I_{50} = I_0 \times 10^{\frac{L}{10}} = 10^{-12} \times 10^{\frac{50}{10}} = 10^{-12} \times 10^5 = 10^{-7}$ W.m^{-2}.

c. $I_{100} = 10^{-12} \times 10^{\frac{100}{10}} = 10^{-12} \times 10^{10} = 10^{-2}$ W.m^{-2}

Donc $I_{100} = 10^5 \times I_{50}$

L'intensité sonore I ne double pas lorsque l'on double le niveau d'intensité sonore L.

d. Pour une distance à la source d_1 (resp. d_2), on note L_1 (resp. L_2) le niveau d'intensité sonore à la distance d_1 (resp. d_2) de la source et I_1 (resp. I_2) l'intensité sonore à la distance d_1 (resp. d_2) de la source.

Le niveau d'intensité sonore diminue de 20 dB lorsque la distance par rapport à la source est multipliée par 10. Ainsi si $d_2 = 10d_1$, on a : $L_2 = L_1 - 20$ (dB).

$I_1 = I_0 \times 10^{\frac{L_1}{10}}$ et $I_2 = I_0 \times 10^{\frac{L_2}{10}}$

Si $d_2 = 10d_1$, alors $L_2 = L_1 - 20$ et donc

$I_2 = I_0 \times 10^{\frac{L_2}{10}} = I_0 \times 10^{\frac{L_1-20}{10}} = I_0 \times 10^{\left(\frac{L_1}{10}-2\right)} = I_0 \times 10^{\frac{L_1}{10}} \times 10^{-2} = I_1 \times 10^{-2} = \dfrac{I_1}{100}$

Donc l'intensité sonore est divisée par 100 lorsque la distance par rapport à la source est multipliée par 10.

EXERCICE 3 **commun à tous les candidats** **4 points**

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six que comporte l'exercice.

Question 1

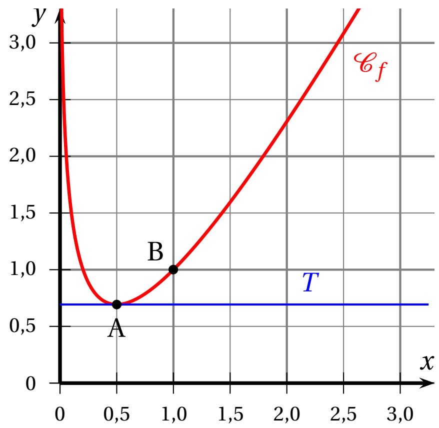
Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = ax + b - \ln(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

On note $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f tracée dans le repère ci- dessous.

On note A le point d'abscisse 0,5 appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.

On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$, au point A. La droite T est parallèle à l'axe des abscisses.

Le point B(1 ; 1) appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.



a. B(1 ; 1) $\in \mathscr{C}_f$ donc $f(1) = 1$.

$f(1) = 1 \iff a + b - \ln(1) = 1 \iff a + b = 1$

b. La courbe admet en A une tangente parallèle à l'axe des abscisses donc de coefficient directeur égal à 0; on a donc $f'(x_A) = 0$ c'est-à-dire $f'(0{,}5) = 0$.

$f'(x) = a - \dfrac{1}{x}$; $f'(0{,}5) = 0 \iff a - \dfrac{1}{0{,}5} = 0 \iff a - 2 = 0 \iff a = 2$

c. $a + b = 1$ et $a = 2$ donc $b = -1$; on en déduit que $f(x) = 2x - 1 - \ln(x)$.

Question 2

Une entreprise achète une machine d'une valeur de 300 000 €. Cette machine perd de sa valeur au fil des années. Cette perte exprimée en euro, à l'instant t exprimé en année, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,15]$ par : $f(t) = 300\,000\left(1-\text{e}^{-0,09t}\right)$.

La machine aura perdu la moitié de sa valeur pour t tel que $f(t) = 150\,000$; on résout cette équation :

$$f(t) = 150\,000 \iff 300\,000\left(1-\text{e}^{-0,09t}\right) = 150\,000 \iff 1-\text{e}^{-0,09t} = 0,5 \iff 0,5 = \text{e}^{-0,09t}$$
$$\iff \ln(0,5) = -0,09t \iff t = -\frac{\ln(0,5)}{0,09}$$

$-\dfrac{\ln(0,5)}{0,09} \approx 7,7$ donc au bout de 8 ans, la machine aura perdu plus de la moitié de sa valeur.

Question 3

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \ln(x)$.

a. Pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2 - 0 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$.

b.
- Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x-1$ qui s'annule et change de signe pour $x = 0,5$.
- $f(0,5) = 2\times 0,5 - 1 - \ln(0,5) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}(2x-1) = -1$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(x) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$
- Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $x \neq 0$ donc on a $f(x) = 2x - 1 - \ln(x) = x\left(2 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) - 1$.

  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{\ln(x)}{x}\right) = 2$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

  On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		$0,5$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Question 4

a. On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' + 0,043\,4y = 0$.

D'après le cours, l'équation différentielle $ay' + by = 0$ pour $a \neq 0$ a pour solutions les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\,\text{e}^{-\frac{b}{a}x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Donc l'équation différentielle (E) a pour solution dans $[0\,;+\infty[$ les fonctions P définies par $P(x) = k\,\text{e}^{-0,0434x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$P(0) = 6,75 \iff k\,\text{e}^{0} = 6,75 \iff k = 6,75$.

Sur $[0\,;+\infty[$ la solution P de cette équation différentielle qui vérifie la condition initiale $P(0) = 6,75$ est définie par $P(x) = 6,75\,\text{e}^{-0,0434x}$.

b. Un signal de puissance initiale $P(0) = 6{,}75$ mW parcourt une fibre optique. La puissance du signal, exprimée en mW, lorsque celui-ci a parcouru une distance de x kilomètres depuis l'entrée de la fibre optique, est donnée par $P(x)$ où P est la fonction déterminée à la question a.

La puissance du signal au bout de 1 km est $P(1) \approx 6{,}4633$, donc la perte de puissance une fois que le signal a parcouru 1 km depuis l'entrée est, en mW, $P(0) - P(1) \approx 0{,}2867$ soit environ 287 μW.

Question 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 5x + 4\right)\,\mathrm{e}^{x}$.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right)\,\mathrm{e}^{x}$.

a. Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$F'(x) = (2x+3) \times \mathrm{e}^{x} + \left(x^2 + 3x + 1\right) \times \mathrm{e}^{x} = \left(2x + 3 + x^2 + 3x + 1\right)\mathrm{e}^{x} = \left(x^2 + 5x + 4\right)\mathrm{e}^{x}$
$= f(x)$.

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_0^1 = F(1) - F(0) = \left((1+3+1)\,\mathrm{e}^{1}\right) - \left((0+0+1)\,\mathrm{e}^{0}\right) = 5\,\mathrm{e} - 1$

Question 6

La tension u aux bornes d'un générateur dépendant du temps t est donnée par :
$u(t) = 240\cos(50t) - 240\sin(50t)$.

La tension u est exprimée en volt et le temps t est exprimé en seconde.

a. Pour tout t appartenant à $[0~;~+\infty[$,

$$\begin{aligned}240\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{4}\right) &= 240\sqrt{2}\left(\cos(50t)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \sin(50t)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 240\sqrt{2}\left(\cos(50t) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(50t) \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= 240\cos(50t) - 240\sin(50t) = u(t)\end{aligned}$$

b. On déduit que la pulsation ω vaut 50 et donc que la fréquence f est égale à $\dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{50}{2\pi} \approx 8$.