Corrigé du baccalauréat STI2D – spécialité

Métropole–La Réunion juin 2021 J2

Physique-Chimie et Mathématiques

EXERCICE 3 **commun à tous les candidats** **4 points**

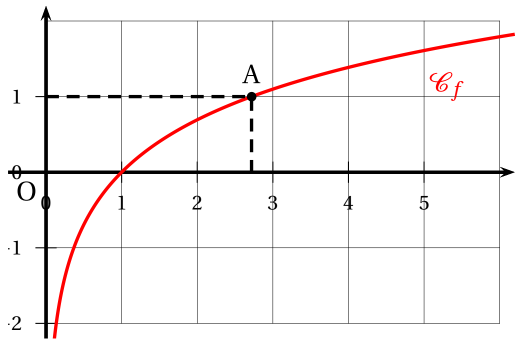
Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six que comporte l'exercice.

Question 1

On a tracé dans le repère orthonormé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x).$$

On note A le point de $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $(\mathrm{e}; 1)$. On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



La tangente T à $\mathscr{C}_f$ en A a pour équation $y = f'(x_{\mathrm{A}})\,(x - x_{\mathrm{A}}) + f(x_{\mathrm{A}})$ soit $y = f'(\mathrm{e})\,(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$.

$f(x) = \ln(x)$ donc $f(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) = 1$

$f(x) = \ln(x)$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et donc $f'(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

T a donc pour équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) + 1$ soit $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x - 1 + 1$ ou encore $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x$.

Et si $x = 0$, alors $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}x = 0$ donc la droite T passe par l'origine du repère..

Question 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,10]$ par : $f(x) = x^2 - x - 2 - 3\ln(x)$.

On note f' la fonction dérivée de f.

a. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0{,}5\,;\,10]$: $f'(x) = 2x - 1 - 0 - 3\dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x}$

Or $(x+1)(2x-3) = 2x^2 + 2x - 3x - 3 = 2x^2 - x - 3$ donc $f'(x) = \dfrac{(x+1)(2x-3)}{x}$.

b. On va déterminer les variations de la fonction f et, pour cela, étudier le signe de $f'(x)$.

x	$0,5$		$1,5$		$+\infty$
$x+1$		$+$	0	$+$	
$2x-3$		$-$	0	$+$	
x		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction f admet donc un minimum en $x = 1,5$ qui vaut
$f(1,5) = 1,5^2 - 1,5 - 2 - 3\ln(1,5) = -1,25 - 3\ln(1,5)$.

Question 3

a. On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{-0,0434x} = 0,01$.

$\mathrm{e}^{-0,0434x} = 0,01 \iff -0,0434x = \ln(0,01) \iff x = -\dfrac{\ln(0,01)}{0,0434}$

b. Un signal de puissance initiale $P(0) = 6,75$ mW parcourt une fibre optique.

La puissance du signal, exprimée en mW, lorsque celui-ci a parcouru une distance de x kilomètres depuis l'entrée est donnée par $P(x) = 6,75\,\mathrm{e}^{-0,0434x}$.

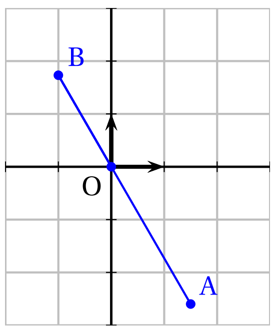
Le signal aura perdu 99 % de sa puissance pour une distance x telle que $P(x) = P(0) \times \left(1 - \dfrac{99}{100}\right)$ donc pour $P(x) = 6,75 \times 0,01$.

$P(x) = 6,75 \times 0,01 \iff 6,75\,\mathrm{e}^{-0,0434x} = 6,75 \times 0,01 \iff \mathrm{e}^{-0,0434x} = 0,01 \iff x = -\dfrac{\ln(0,01)}{0,0434}$ ce qui donne environ 106 km.

Question 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_{\mathrm{B}} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.



Les points O, A et B sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ a pour affixe z_{A} et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ a pour affixe z_{B}.

$z_{\mathrm{A}} = 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 3\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

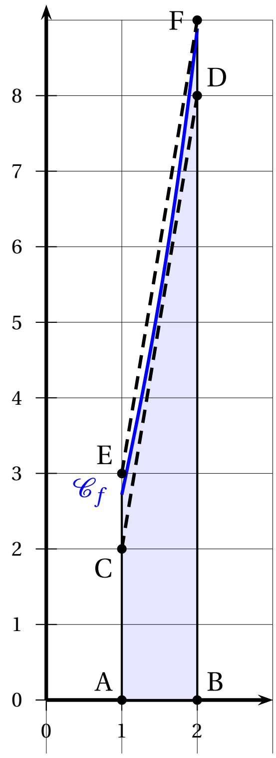
$= -\dfrac{3}{2}\left(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = -\dfrac{3}{2}z_{\mathrm{B}}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ sont colinéaires, et donc les points O, A et B sont alignés.

Question 5

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ par :

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{x} - \frac{1}{x}.$$



On a tracé dans le repère orthonormé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. On considère les points A(1 ; 0) ; B(2 ; 0) ; C(1 ; 2) ; D(2 ; 8) ; E(1 ; 3) et F(2 ; 9). On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus du segment [CD] et en dessous du segment [EF].

a. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire de la région du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

$\mathscr{A}$ est compris entre l'aire $\mathscr{A}_1$ du trapèze ABDC et l'aire $\mathscr{A}_2$ du trapèze ABFE.

$\mathscr{A}_1 = \dfrac{(\mathrm{AC}+\mathrm{BD})\times \mathrm{AB}}{2} = \dfrac{(2+8)\times 1}{2} = 5$

$\mathscr{A}_2 = \dfrac{(\mathrm{AE}+\mathrm{BF})\times \mathrm{AB}}{2} = \dfrac{(3+9)\times 1}{2} = 6$

Donc $5 \leqslant \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 6$.

b. Pour calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, il faut déterminer une primitive de la fonction f sur $[1\,;\,2]$.

$f(x) = x + \mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{x}$

- La fonction $x \longmapsto x$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$.
- La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto \ln(x)$.

Donc la fonction f a pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{e}^{x} - \ln(x)$.

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_1^2 = F(2) - F(1) = \left(\frac{4}{2} + \mathrm{e}^{2} - \ln(2)\right) - \left(\frac{1}{2} + \mathrm{e}^{1} - \ln(1)\right) = 2 + \mathrm{e}^{2} - \ln(2) - \frac{1}{2} - \mathrm{e}$$
$$= \frac{3}{2} + \mathrm{e}^{2} - \ln(2) - \mathrm{e}$$

Remarque : $\dfrac{3}{2} + \mathrm{e}^{2} - \ln(2) - \mathrm{e} \approx 5,48$ qui est compris entre 5 et 6.

Question 6

La tension u aux bornes d'un générateur, exprimée en volt, dépendant du temps t, exprimé en seconde, est donnée à l'instant t par : $u(t) = 120\cos(70t) - 120\sin(70t)$.

a. Pour tout t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$,

$$\begin{aligned} 120\sqrt{2}\cos\left(70t+\frac{\pi}{4}\right) &= 120\sqrt{2}\left(\cos(70t)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)-\sin(70t)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 120\sqrt{2}\left(\cos(70t)\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin(70t)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= 120\cos(70t)-120\sin(70t)\\ &= u(t)\end{aligned}$$

b. On déduit de la question précédente que la pulsation ω est égale à 70 et que la fréquence f est égale à $\dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{70}{2\pi} \approx 11$.