∽ Corrigé du baccalauréat STI2D & STL/SPCL ∾

septembre 2021

Dans l'épreuve Physique-Mathématiques un sujet de mathématiques et trois de Physique (4 points sur 20 ...)

Exercice 3 commun à tous les candidats **4 points**

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six que comporte l'exercice.
Les questions sont indépendantes. Chacune d'elles est notée sur un point.

Le candidat choisit les quatre questions auxquelles il répond et indique clairement leur numéro sur sa copie en début d'exercice.

Pour chaque question, préciser si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Question 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\,\text{e}^{x}$.

Affirmation 1 : « La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$. »

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x \times \text{e}^{x} + x^2 \times \text{e}^{x} = x(2+x)\,\text{e}^{x}$.
Sur $]-2~;~0[$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.
Affirmation 1 fausse

Question 2
On considère la fonction h définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = \ln(2x+1)$.
On désigne par $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine O et d'unité graphique 1 cm.
On note $M(x~;~y)$ un point de la courbe $\mathscr{C}_h$. On suppose que l'ordonnée y du point M est supérieure à 15 cm.

Affirmation 2 : « L'abscisse x du point M se situe à plus de 16 km du point O. »

On cherche l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 15, ce qui signifie qu'on cherche le nombre x tel que $h(x) = 15$. On résout cette équation :

$h(x) = 15 \iff \ln(2x+1) = 15 \iff 2x+1 = \text{e}^{15} \iff x = \dfrac{\text{e}^{15}-1}{2}$ donc $x \approx 1\,634\,508{,}19$ cm soit environ $16{,}345$ km.
Affirmation 2 vraie

Question 3
Le thorium 231 est un élément radioactif qui se désintègre selon la loi :
$N(t) = N(0)\,\text{e}^{-0{,}027t}$ où $N(0)$ est le nombre de noyaux au début de l'observation et $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t exprimé en heure.
La demi-vie d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la moitié de ses noyaux se sont désintégrés.

Affirmation 3 :
« La demi-vie du thorium 231 est d'environ 11 heures. »

On cherche $t_{0,5}$ tel que $N(t_{0,5}) = \dfrac{1}{2}N(0)$ soit $N(0)\,\mathrm{e}^{-0,027t_{0,5}} = \dfrac{1}{2}N(0)$ ou $\mathrm{e}^{-0,027t_{0,5}} = \dfrac{1}{2}$.
On résout cette équation : $\mathrm{e}^{-0,027t_{0,5}} = \dfrac{1}{2} \iff -0,027t_{0,5} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff t_{0,5} = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0,027}$
Donc $t_{0,5} \approx 25,7$.
Affirmation 3 fausse

Question 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos(t) + 2\sin(t)$.
On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.

Affirmation 4 :
« La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) et vérifie les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. »

On regarde si la fonction f vérifie les conditions requises.

- $f(t) = \cos(t) + 2\sin(t)$ donc $f'(t) = -\sin(t) + 2\cos(t)$ et $f''(t) = -\cos(t) - 2\sin(t)$.
  $f''(t) + f(t) = (-\cos(t) - 2\sin(t)) + (\cos(t) + 2\sin(t)) = 0$ donc la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).
- $f(t) = \cos(t) + 2\sin(t)$ donc $f(0) = \cos(0) + 2\sin(0) = 1$
- $f'(t) = -\sin(t) + 2\cos(t)$ donc $f'(0) = -\sin(0) + 2\cos(0) = 2$

Affirmation 4 vraie

Question 5 :
On considère le nombre complexe $z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$.

Affirmation 5 :
« Le nombre complexe z^4 est un nombre réel négatif. »

$z = \dfrac{2-\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}} = \dfrac{(2-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{(1-3\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})} = \dfrac{2-\mathrm{i}+6\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{1-(3\mathrm{i})^2} = \dfrac{5+5\mathrm{i}}{10} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

$|z| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{2}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

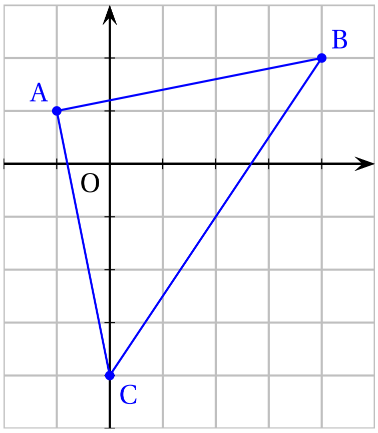
$z^4 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \mathrm{e}^{4\times\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\dfrac{1}{4}$

Affirmation 5 vraie

Question 6 :
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -1+\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 4+2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = -4\mathrm{i}.$$

Affirmation 6 :
« Le triangle ABC est rectangle et isocèle. »



$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 = (4 - (-1))^2 + (2 - 1)^2 = 25 + 1 = 26$
$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2 = (0 - (-1))^2 + (-4 - 1)^2 = 1 + 25 = 26$
On peut donc dire que le triangle ABC est isocèle en A.
$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2 = (0 - 4)^2 + (-4 - 2)^2 = 16 + 36 = 52$
Or $52 = 26 + 26$ donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc, d'après la récirpoque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.
On peut donc dire que le triangle ABC est isocèle rectangle en A.
Affirmation 6 vraie