∽ Corrigé du baccalauréat STI2D & STL/SPCL ∾

Sujet 0 année 2021

Spécialité : physique-chimie et mathématiques

Dans l'épreuve Physique-Mathématiques un sujet de mathématiques et trois de Physique (4 points sur 20 ...)

Exercice 5 **4 points**

Le candidat doit traiter quatre questions parmi les six numérotées de 1 à 6 que comporte l'exercice. Les questions sont indépendantes.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Question 1. On considère le nombre complexe $z_1 = \dfrac{2-6\text{i}}{2-\text{i}}$.

On cherche la forme algébrique de z_1.

$z_1 = \dfrac{2-6\text{i}}{2-\text{i}} = \dfrac{(2-6\text{i})(2+\text{i})}{(2-\text{i})(2+\text{i})} = \dfrac{4+2\text{i}-12\text{i}-6\text{i}^2}{4-\text{i}^2} = \dfrac{10-10\text{i}}{5} = \dfrac{5(2-2\text{i})}{5} = 2-2\text{i}$

Question 2. Soit z_2 le nombre complexe défini par : $z_2 = -2-2\text{i}$.

a. On cherche la forme exponentielle de z_2.

- $|z_2| = |-2-2\text{i}| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $z_2 = -2-2\text{i} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{-2}{2\sqrt{2}} - \dfrac{2}{2\sqrt{2}}\text{i}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{i}\right)$

  On cherche θ tel que $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

  Une valeur de θ est $-\dfrac{3\pi}{4}$.

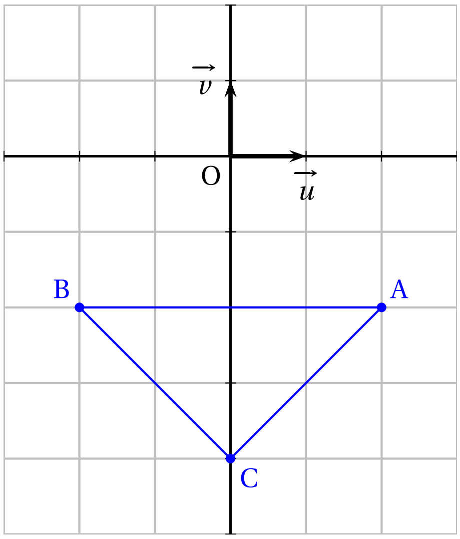
z_2 a pour forme exponentielle $2\sqrt{2}\,\text{e}^{-\text{i}\frac{3\pi}{4}}$.

b. $z_2^4 = \left(2\sqrt{2}\,\text{e}^{-\text{i}\frac{3\pi}{4}}\right)^4 = \left(2\sqrt{2}\right)^4 \text{e}^{4\times\left(-\text{i}\frac{3\pi}{4}\right)} = 64\,\text{e}^{-3\text{i}\pi}$

$\text{e}^{-3\text{i}\pi} = \text{e}^{\text{i}\pi} = -1$ donc $z_2^4 = -64$ et donc z_2^4 est un nombre réel.

Question 3. Soient A, B et C tels que : $z_\text{A} = 2-2\text{i}$, $z_\text{B} = -2-2\text{i}$ et $z_\text{C} = -4\text{i}$.

a. On place les points A, B et C dans un repère :



b. On calcule les longueurs AB, BC et AC.

- $\text{AB} = |z_\text{B} - z_\text{A}| = |-2 - 2\text{i} - 2 + 2\text{i}| = |-4| = 4$
- $\text{BC} = |z_\text{C} - z_\text{B}| = |-4\text{i} + 2 + 2\text{i}| = |2 - 2\text{i}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $\text{AC} = |z_\text{C} - z_\text{A}| = |-4\text{i} - 2 + 2\text{i}| = |-2 - 2\text{i}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

BC = AC donc le triangle ABC est isocèle.
$\text{BC}^2 + \text{AC}^2 = 8 + 8 = 16 = 4^2 = \text{AB}^2$ donc d'après la récirpoque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en C.
Donc le triangle ABC est isocèle rectangle en C.

Question 4. On considère l'équation différentielle $y' + 5y = 7$.

a. D'après le cours on sait que pour $a \neq 0$, les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = k\,\text{e}^{-at} + \dfrac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 7$ sont donc les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = k\,\text{e}^{-5t} + \dfrac{7}{5}$ où $k \in \mathbb{R}$.

b. $f(0) = 4 \iff k\,\text{e}^0 + \dfrac{7}{5} = 4 \iff k = 4 - \dfrac{7}{5} \iff k = \dfrac{13}{5}$
La solution cherchée est la fonction f telle que : $f(t) = \dfrac{13}{5}\text{e}^{-5t} + \dfrac{7}{5}$

Question 5. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x + 4$.

a. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, et on note g' sa fonction dérivée.
Pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 - 0 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

b. On étudie les variations de g.

- Sur $]0\,;\,1[$, $\ln(x) < 0$ donc $g'(x) < 0$: la fonction g est strictement décroissante.
- Sur $]1\,;\,+\infty[$, $\ln(x) > 0$ donc $g'(x) > 0$: la fonction g est strictement croissante.
- Pour $x = 1$, $\ln(x) = 0$ donc g' s'annule et passe de négative à positive : la fonction g admet un minimum égal à $g(1) = 1 \times \ln(1) - 1 + 4 = 3$.

Question 6. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. Limite de h en $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty\end{array}\right\}\text{ donc par produit, }\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$$

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x}}$

D'après le cours, on sait que pour $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x^n} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x^2} = +\infty$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ et donc que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

On admet que h est strictement décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$ et que l'équation $h(x) = 0,5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$ que l'on note α.

c. On complète le programme ci-dessous pour que la fonction `sol_bal` détermine une valeur approchée à 10^{-n} près de α par balayage.

```
from math import exp

def sol_bal(n)
    x = 2
    while x**2*exp(-x) > 0,5
        x = x+10**(-n)
    return x
```