Baccalauréat STI2D & STL/SPCL

Sujet 0 année 2021

Dans l'épreuve Physique-Mathématiques un sujet de mathématiques et trois de Physique (4 points sur 20 ...)

Exercice 3 **4 points**

Question 1

a. On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' + 100y = 8$.

D'après le cours on sait que les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ (avec $a \neq 0$), sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par : $v(t) = k\,\text{e}^{-at} + \dfrac{b}{a}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + 100y = 8$ sont donc les fonctions v définies par : $v(t) = k\,\text{e}^{-100t} + \dfrac{8}{100}$ où $k \in \mathbb{R}$.

$v(0) = 0 \iff k\,\text{e}^{0} + \dfrac{8}{100} = 0 \iff k = -\dfrac{8}{100}$

La solution v définie sur $[0\,;\,+\infty[$ de cette équation différentielle, qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$, est définie par $v(t) = 0,08 - 0,08\,\text{e}^{-100t}$.

b. La fonction v déterminée à la question précédente modélise la vitesse (exprimée en m.s^{-1}) de chute d'une bille dans un liquide visqueux en fonction du temps t écoulé depuis le début de la chute (exprimé en s).

$v(0,01) = 0,08 - 0,08\,\text{e}^{-1} \approx 0,050\,57$

La vitesse de la bille après $0,01$ seconde de chute est de $0,051$ m.s^{-1}.

Question 2

La tension u (exprimée en volt) aux bornes d'un dipôle en fonction du temps t (exprimé en seconde) est donnée par : $u(t) = \dfrac{7\sqrt{3}}{4}\cos(100t) - \dfrac{7}{4}\sin(100t)$.

a.
$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{7\sqrt{3}}{4}\cos(100t) - \frac{7}{4}\sin(100t) = \frac{7}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(100t) - \frac{7}{2} \times \frac{1}{2}\sin(100t) \\ &= \frac{7}{2}\left(\cos(100t) \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin(100t) \times \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\dfrac{1}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. Donc :

$$u(t) = \frac{7}{2}\left(\cos(100t)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin(100t)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{7}{2}\cos\left(100t + \frac{\pi}{6}\right)$$

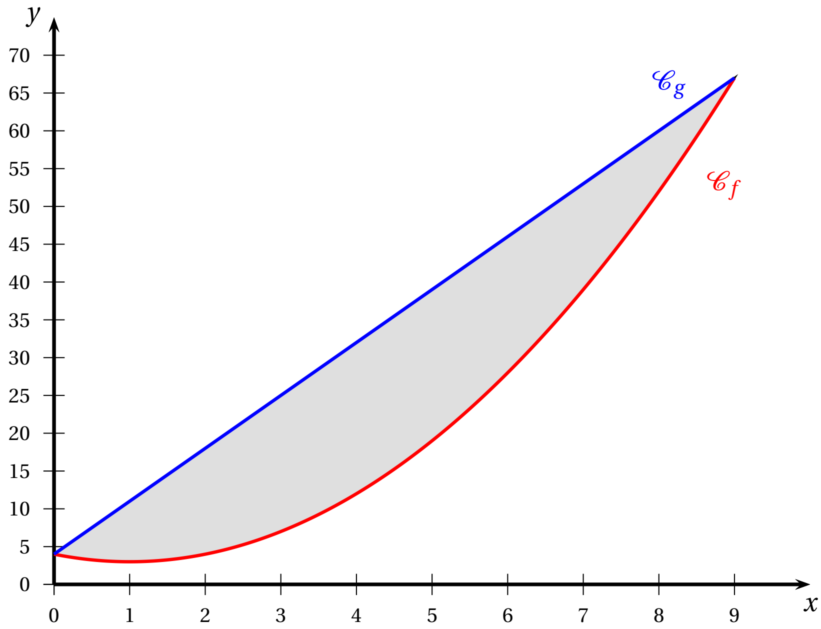
b. Le déphasage φ de $u(t)$ est donc égal à $\dfrac{\pi}{6}$.

Question 3

On considère les deux fonctions f et g définies et continues sur $[0\,;\,9]$ respectivement par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 \text{ et } g(x) = 7x + 4.$$

Les représentations graphiques des deux fonctions sont données ci-dessous.



$f(0) = g(0) = 4$ et $f(9) = g(9) = 67$ et sur l'intervalle $[0~;~9]$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$; donc la valeur de l'aire, exprimée en unité d'aire, située entre les courbes représentatives de ces deux fonctions est : $\displaystyle\int_0^9 \big(g(x) - f(x)\big)\,\text{d}x$.

$g(x) - f(x) = (7x+4) - \left(x^2 - 2x + 4\right) = 7x + 4 - x^2 + 2x - 4 = -x^2 + 9x$

On cherche une fonction H primitive de $g - f$: la fonction définie par $H(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 9\dfrac{x^2}{2}$ convient.

$\displaystyle\int_0^9 \big(g(x) - f(x)\big)\,\text{d}x = \big[H(x)\big]_0^9 = H(9) - H(0) = \left(-\frac{9^3}{3} + 9\frac{9^2}{2}\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 9\frac{0^2}{2}\right) = \frac{243}{2}$

La valeur de l'aire située entre les courbes représentatives de ces deux fonctions est $121,5$ U.A.

Question 4

La tension $u_c(t)$ (exprimée en voit), aux bornes d'un condensateur lors de sa charge, est modélisée par : $u_c(t) = E\left(1 - \text{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$ où t désigne le temps, exprimé en seconde.

Les caractéristiques du condensateur utilisé sont :

- Tension maximale : $E = 4$ V
- Résistance : $R = 10^3\ \Omega$
- Capacité : $C = 2 \times 10^{-3}$ F

On a donc $RC = 2$ ce qui donne $u_c(t) = 4\left(1 - \text{e}^{-\frac{t}{2}}\right)$.

Le temps de charge t nécessaire pour obtenir une tension aux bornes du condensateur égale à la moitié de sa tension maximale est tel que $u_c(t) = \dfrac{E}{2}$ c'est-à-dire $u_c(t) = 2$.

On résout cette équation.

$u_c(t) = 2 \iff 4\left(1 - \text{e}^{-\frac{t}{2}}\right) = 2 \iff 1 - \text{e}^{-\frac{t}{2}} = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{2} = \text{e}^{-\frac{t}{2}} \iff \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{t}{2}$

$\iff t = -2\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ soit environ $1,4$ seconde.