Courrier des lecteurs

Petit complément sur les tirages dans une urne

Dans son article « Petit essai sur les tirages dans une urne » paru dans le Bulletin n° 443, p. 704, Yves Haubry établit que, si l'on effectue N tirages dans une urne contenant initialement b boules blanches et n noires, la moyenne du nombre X_N de boules blanches tirées est $\frac{Nb}{b+n}$, que les N tirages soient effectués *avec* ou *sans* remise.

En fait, il s'agit de deux cas particuliers de la situation suivante introduite par Georges Polya en 1923 : on part d'une urne contenant b blanches et n noires et l'on effectue N tirages en remettant dans l'urne, outre la houle tirée, c boules de la mône couleur, où c est un entier supérieur ou égal à −1. Pour $c > 0$, cette situation sert à modéliser des processus de contagion ou d'apprentissage ; le cas $c = 0$ correspond aux tirages avec remise, le cas $c = -1$ aux tirages sans remise. Je dis qu'on a toujours :

$E(X_N) = \frac{Nb}{b+n}$, pour tout N et ceci quel que soit c.

Le résultat est évident pour N = 1 ; nous allons le démontrer par récurrence sur N, suivant une technique introduite au XVII^e siècle par Blaise Pascal pour résoudre le problème des partis et développée par Kolmogorov vers 1930 pour l'étude des chaînes de Markov. Le calcul repose sur la formule suivante démontrée en annexe :

Étant données deux variables aléatoires X et Y, si E (X / Y) désigne l'espérance de X conditionnée par Y, alors on a : E(E(X / Y)) = E(X).

Pour établir notre formule, $E(X_N) = \frac{Nb}{b+n}$, nous allons donner deux démonstrations, la première (a), dite « en avant », en conditionnant X_N par X_{N-1} qui résulte des N − 1 premiers tirages, la seconde (b), dite « en arrière », en conditionnant par le résultat X_1 du premier tirage.

a) Si on connaît X_{N-1}, le N-ème tirage s'effectue dans une urne contenant $b + cX_{N-1}$ blanches et $n + c(N - 1 - X_{N-1})$ noires. On a donc

$$X_N = \begin{cases} X_{N-1} + 1 & \text{avec probabilité : } \dfrac{b + cX_{N-1}}{b+n+c(N-1)} \\ X_{N-1} & \text{avec probabilité : } \dfrac{n + c(N-1) - cX_{N-1}}{b+n+c(N-1)} \end{cases}$$

et

$$E(X_N \ / \ X_{N-1}) = X_{N-1} + \frac{b + cX_{N-1}}{b+n+c(N-1)} = \frac{b + X_{N-1}(b+n+cN)}{b+n+c(N-1)}$$

d'où, par l'hypothèse de récurrence :

$$E(X_N) = E(E(X_N \ / \ X_{N-1}) = \frac{b + E(X_{N-1})(b+n+cN)}{b+n+c(N-1)}$$

$$= \frac{b + (N-1)\dfrac{b}{b+n}(b+n+cN)}{b+n+c(N-1)} = \frac{Nb(b+n+c(N-1))}{(b+n+c(N-1))(b+n)} = \frac{Nb}{b+n}.$$

b) Si on connaît X_1, alors X_2, …, X_N sont déterminés par une suite de N – 1 tirages analogue à la suite initiale, mais en partant d'une urne contenant $b + n + c$ boules dont $b + n + cX_1$ sont blanches. Par l'hypothèse de récurrence, on a donc :

$$E(X_N \ / \ X_1) = X_1 + \frac{b + cX_1}{b+n+c},$$

d'où :

$$E(X_N) = E(E(X_N \ / \ X_1) = \frac{(N-1)b}{b+n+c} + \frac{(b+n+Nc)E(X_1)}{b+n+c}$$

$$= \frac{(N-1)b}{b+n+c} + \frac{b+n+Nc}{b+n+c}\,\frac{b}{b+n} = \frac{bN(b+n+c)}{(b+n+c)(b+n)} = \frac{Nb}{b+n}.$$

Annexe : espérance conditionnelle

1) Définition à partir de la probabilité conditionnelle

Une variable aléatoire X prenant la valeur x_i sur la partie A_i de Ω peut s'écrire : $X = \sum x_i 1_{A_i}$ et son espérance : $E(X) = \sum x_i P(A_i)$; de même une seconde variable Y s'écrit : $Y = \sum y_j 1_{B_j}$. On appelle *espérance de* X *conditionnée par* Y, la variable aléatoire :

$$E(X \ / \ Y) = \sum \left(\sum x_i P(A_i \ / \ B_j) \right) 1_{B_j}.$$

L'espérance de cette variable n'est autre que l'espérance de X, elle s'écrit en effet :

$$E(E(X \ / \ Y)) = \sum \left(\sum x_i P(A_i \ / \ B_j) \right) P(B_j)$$

$$= \sum x_i \sum P(A_i \cap B_j) = \sum x_i P(A_i) = E(X).$$

2) Définition géométrique

L'espace Ξ des variables aléatoires réelles sur Ω est un espace vectoriel réel dont une base est formée des 1_ω où ω parcourt Ω ; il est donc de dimension card(Ω) et l'espérance est une forme linéaire sur Ξ. On munit Ξ d'un produit scalaire en associant au couple (X, Y) le réel E(XY). Alors, avec les mêmes notations qu'en 1), si l'on note Ξ_Y le sous espace de Ξ engendré par les 1_{B_j}, on appelle *espérance de* X *conditionnée par* Y, *la projection orthogonale de* X *sur* Ξ_Y. Comme $1_\Omega \in \Xi_Y$, on a : $E((X - E(X / Y))\, 1_\Omega) = 0$, donc : $E(X - E(X / Y)) = 0$ ou $E(X) = E(E(X / Y))$.

Reste à montrer que E(X / Y) ainsi définie coïncide avec la variable définie en 1) ;

posons $E(X / Y) = \sum u_j 1_{B_j}$, on a pour tout *j* :

$$E((X - E(X / Y))\, 1_{B_j}) = 0,$$

d'où :

$$E\left(\sum x_i 1_{A_i} \cdot 1_{B_j}\right) = E\left(u_j 1_{B_j}\right)$$

ou

$$\sum x_i P(A_i \cap B_j) = u_j P(B_j)$$

et

$$u_j = \sum x_i P(A_i / B_j).$$

Paul-Louis Hennequin