Corrigé de l'exercice 1.

1. On obtient la suite suivante : 1, 2, 3, 4, 5, 6, pinto, 8, 9, 10, 11, 12, 13, pinto, 15, 16, pinto, 18, 19, 20, pinto, 22, 23, 24, 25, 26, pinto, pinto, 29, 30, 31, 32, 33, 34, pinto, 36, pinto, 38, 39, 40, 41, pinto.

2. On va calculer la probabilité de ne pas se tromper, jusqu'à ce que l'on arrive à une probabilité inférieure à 0,25.

Trois cas d'interprétation de l'énoncé sont possibles.

- 7 se termine par un 7 donc la probabilité de se tromper est de 0,9.

Nombre	7	14	17	21	27	28	35
P	0,9	0,7	0,9	0,7	0,9	0,7	0,7
P cumulée	0,9	0,63	0,567	0,3969	0,35721	0,250047	0,17

Dans ce cas la probabilité de perdre est supérieure à 0,75 à partie de 35.

- 7 est un multiple de 7 donc la probabilité de se tromper est de 0,7.

Nombre	7	14	17	21	27	28
P	0,7	0,7	0,9	0,7	0,9	0,7
P cumulée	0,7	0,49	0,441	0,3087	0,27783	0,19

Dans ce cas la probabilité de perdre est supérieure à 0,75 à partie de 28.

- 7 est un multiple de 7 et se termine par 7 donc la probabilité de se tromper est de 0,4.

Nombre	7	14	17	21	27
P	0,6	0,7	0,9	0,7	0,9
P cumulée	0,6	0,42	0,378	0,2646	0,23

Dans ce cas la probabilité de perdre est supérieure à 0,75 à partie de 27.

3.
- Hugo jouera sur les nombres : 1, 4, **7**, 10, 13, 16, 19, 22, 25, **28**, 31, 34, **37**, 40, 43, 46, **49**.

  Soit une probabilité de ne pas se tromper de $p \times 0,7 \times 0,7 \times 0,7$. Comme p peut valoir 0,9, 0,7 ou 0,6, on a les probabilités de ne pas se tromper : 0,3087, 0,2401 et 0,2058.
- Anne jouera les nombres : 2, 5, 8, 11, **14**, **17**, 20, 23, 26, 29, 32, **35**, 38, 41, 44, **47**, 30.

  Soit une probabilité de ne pas se tromper de $0,7 \times 0,9 \times 0,7 \times 0,7 = 0,3969$.
- Arthur jouera les nombres 3, 6, 9, 12, 15, 18, **21**, 24, **27**, 30, 33, 36, 39, **42**, 45, 48.

  Soit une probabilité de ne pas se tromper de $0,7 \times 0,9 \times 0,7 = 0,567$.

Dans tous les cas, c'est Arthur qui est le favorisé.

4. On obtient l'algorithme 1

5. $u_n - r_7$ est un multiple de 7 et $u_n - s_n$ est lui un multiple de 10. On en déduit que $u_n + 7 - r_n$ est le premier multiple de 7 après u_n et $u_n + 7 - s_n$ est le premier nombre se terminant par 7. Le choix étant le plus petit des deux nombres r_n et s_n.

On obtient alors l'algorithme 2.

```
TestPinto(n)
Résultat ← Faux
si reste(n;10)=7 alors
 | Résultat ← Vrai
fin
si reste(n;7) = 0 alors
 | Résultat ← Vrai
fin
```

Algorithme 1 : Algorithme de test d'un nombre pinto

```
CalcPinto(n)
u ← 0,
a ← 0,
b ← 0
pour i de 1 à n faire
 | si b < a < 7 alors
 | | u ← u + 7 − a
 | fin
 | sinon
 | | u ← u + 7 − b
 | fin
 | a ← reste(u;10)
 | b ← reste(u;7)
fin
```

Algorithme 2 : Algorithme de construction des nombres pinto

6. Les 18 premiers nombres de la suite u_n sont :

$$07, 14, 17, 21, 27, 28, 35, 37, 42, 47, 49, 56, 57, 63, 67, 70, 77, 84.$$

La suite v_n est donc :

$$7, 7, 3, 4, 6, 1, 7, 2, 5, 5, 2, 7, 1, 6, 4, 3, 7, 7$$

qui est bien un palindrome.

7. **a.** Supposons que l soit un pinto. Alors soit l est un multiple de 7 et $70k + l$ est aussi un multiple de 7, soit l se termine par un 7 et $70k + l$ se termine aussi par un 7.

Réciproquement, supposons que $70k + l$ soit un nombre pinto. Alors soit $70k + l$ est un multiple de 7 est donc l doit être un multiple de 7. Soit $70k + l$ se termine par 7 et l se termine forcément par 7.

Donc $70k + l$ est un pinto si et seulement si l est un pinto.

Pour que $k + l$, avec k un entier et l un pinto soit un pinto, il faut que $k + l$ soit un multiple de 7 ou se termine par un 7 et alors k et un multiple de 10. Donc, le plus petit nombre, non nul, ayant cette propriété est 70.

b. On considère le tableau suivant :

n	U_n	q_n	R_n	u_{R_n}
1	7	0	1	u_1
2	14	0	2	u_2
3	17	0	3	u_3
4	21	0	4	u_4
5	27	0	5	u_5
6	28	0	6	u_6
7	35	0	7	u_7
8	37	0	8	u_8
9	42	0	9	u_9
10	47	0	10	u_{10}
11	49	0	11	u_{11}
12	56	0	12	u_{12}
13	57	0	13	u_{13}
14	63	0	14	u_{14}
15	67	0	15	u_{15}
16	70	1	0	u_0

En posant $u_0 = 0$, on conjecture que $u_n = 70q_n + u_{R_n}$.

c. $9\,231 = 16 \times 576 + 15$, on en déduit d'après la question précédente que $u_{9\,231} = 576 \times 70 + u_{15} = 576 \times 70 + 67 = 40\,387$.

Corrigé de l'exercice 2.

Étude de configurations

1. Comme pour changer de couleurs les caméléons doivent rencontrer un caméléon d'une autre couleur, les trois configurations sont stables, puisque constituées de population de même couleur.

2. On part de $(23\,;15\,;17)$, et un rouge rencontre un vert, ce qui donne $(22\,;14\,;19)$, puis après la rencontre d'un rouge et d'un vert, $(21\,;13\,;21)$.

Puis après 21 rencontre d'un rouge et d'un bleu, on obtient $(0\,;55\,;0)$.

3. À partir du moment ou deux catégories sont de même couleur, la rencontre systèmatique de caméléons de ces deux couleurs formera une population unique de la 3e catégorie.

4. Soit $(r\,;v\,;b)$, avec $r+v+b=55$. Quitte à changer les noms on raisonne avec r et v.

Supposons que $r-v=3k$. Partons d'une configuration $(v+3k\,;v\,;55-2v-3k)$. On effectue v rencontre entre rouges et bleus, ce qui donne : $(3k\,;0\,;55-3k)$. Si k est nul, on s'arrête. Sinon, on effectue une rencontre rouge et bleu, ce qui donne : $(3k-1\,;2\,;55-3k-1)$. Puis deux rencontres rouge et vert, soit : $(3k-3\,;0\,;55-3k+3) = (3k'\,;0\,;55-3k')$, avec $k'=k-1$.

On a ainsi une suite d'entier positif, décroissant. On arrive alors nécessairement à une valeur de k nulle. On aura alors une configuration $(0\,;0\,;55)$.

Réciproquement, on considère une configuration $(r\,;v\,;b)$ dans laquelle une égalisation des couleurs est possible après k étapes. Soit $(r\,;r\,;55-2r)$. Il faut dès lors partir de $(r+k\,;r-2k\,;55-2r+k)$ (k échanges de rouges et de bleus). Alors la différence des populations de rouges et de verts est un multiple de 3.

5. $23-15=8$ qui n'est pas multiple de 3 ; $17-15=2$ qui n'est pas multiple de 3. On ne peut donc pas obtenir une configuration n'ayant que couleur la couleur rouge ou la couleur bleue de caméléons.
6. Une proposition en python :

```
liste = []

for r in range(0,56) :
    for v in range(0,56-r):
        b = 55 -r - v
        if abs(r -v) % 3  == 0 or abs(r-b) % 3 == 0 or abs(v-b) % 3 == 0 :
            liste.append((r,v,b))


print(len(liste))
```

Ce programme donne 1 596 triplets différents.

Une représentation géométrique

1. $\overrightarrow{u_1}=(2\,;-1)$, il s'agit donc de la rencontre d'un vert et d'un bleu.
   $\overrightarrow{v_1}=(-1\,;-1)$, il s'agit donc de la rencontre d'un rouge et d'un vert.
   $\overrightarrow{w_1}=(-1\,;2)$, il s'agit donc de la rencontre d'un rouge et d'un bleu.
2. On obtient la figure 1.
3. On obtient la figure 1.
4. **a.** Tous les points ont été colorié dans l'une des trois couleurs, donc tous les points mènent à une coonfiguration stable.
   b. Aucun point n'a été colorié deux fois, donc aucun point ne peut mener vers deux configuration.

Étude du cas général

1. Soit une configuration $(r\,;v\,;b)$, avec r le plus petit des trois nombres (si non, on permute). Alors en faisant r rencontres rouges-verts, on obtient $(0\,;v-r\,;b+2r)$.
2. Considérons une population à 6 caméléons. On a colorié les points qui peuvent être mener à une configuration où il y a une seule couleur. Or des points restent en gris et les points vert et rouge mène au bleu.
   Par exemple $(1\,;2\,;3)$ ne ménera pas à une configuration ayant une seule couleur.

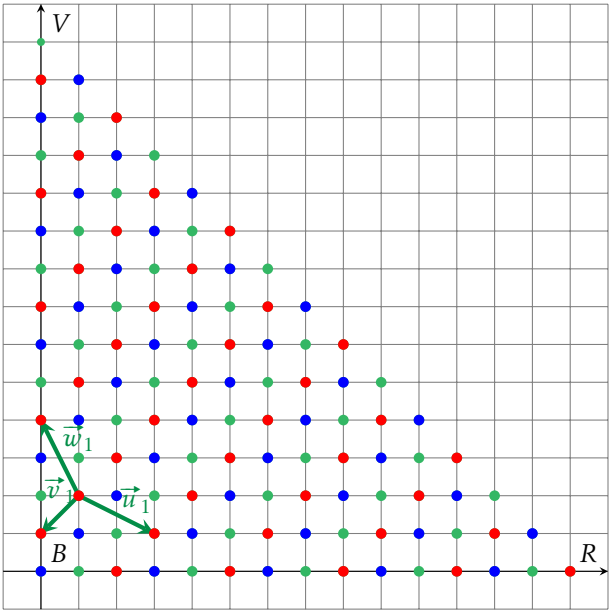

Figure 1

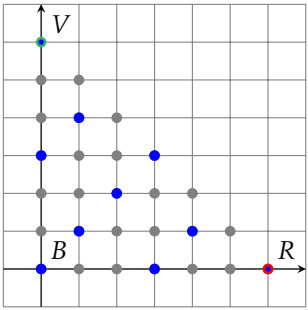

Figure 2