Bulletin de l'APMEP n° 375 - septembre 1990

Didactique

Programme de résolution de l'équation du 4ème degré à coefficients réels

J. de Biasi
Université Paul Sabatier - Toulouse

F.de Biasi
Ecole Nationale des Ponts et Chaussées-Paris

La contribution des algébristes italiens du XVIème siècle (SCIPIONE DEL FERRO, TARTAGLIA, CARDAN, BOMBELLI, FERRARI) à l'étude des équations du 3ème et du 4ème degré est essentielle et rappelons que c'est pour cette étude qu'ils ont introduit comme artifices de calcul les nombres "impossibles" ou "fictifs", ou "imaginaires", premiers nombres complexes. Mais évidemment, ils n'utilisaient que des équations à coefficients réels et ne recherchaient que les racines réelles.

Nous proposons ici un programme de résolution de l'équation du 4ème degré à coefficients réels, basé sur la méthode qu'avait proposée, à l'âge de 23 ans (en 1545) LUIGI FERRARI (la limitation aux coefficients réels n'est pas due au respect de l'histoire, mais à un souci de simplicité).

En langage actuel, la méthode de FERRARI se présente ainsi :

Soit l'équation $X^4 + AX^3 + BX^2 + CX + D = 0$ (1) $\left[(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4\right]$

Le changement d'inconnue $x = X - \frac{A}{4}$ la transforme en une équation

sans x^3: $x^4 + bx^2 + cx + d = 0$ (2)

Or, quel que soit le paramètre y, (2) équivaut à :

$$x^4 + x^2 y + \frac{1}{4}y^2 = (y - b)x^2 - cx + \frac{1}{4}y^2 - d \quad ,$$

soit $$\left(x^2 + \frac{y}{2}\right)^2 = (y - b)x^2 - cx + \frac{1}{4}y^2 - d \qquad (3)$$

Le deuxième membre de (3), trinôme du second degré en x, est un carré parfait, $(mx + n)^2$, si et seulement si son discriminant $c^2 - (y^2 - 4d)(y - b)$ est nul, c'est-à-dire si et seulement si y est une solution de l'équation :$y^3 - by^2 - 4dy + 4bd - c^2 = 0$. (R) appelée résolvante de (1).

On détermine donc une racine y_0 de (R) puis m et n tels que

$$(y_0 - b)x^2 - cx + \frac{1}{4}y_0^2 - d = (mx + n)^2 \quad .$$

Il ne reste plus alors qu'à calculer les racines des deux équations du second degré : $x^2 + mx + \frac{1}{2}y_0 + n = 0$ et $x^2 - mx + \frac{1}{2}y_0 - n = 0$ pour avoir les quatre racines de l'équation (2).

Pour rechercher une solution de (R), FERRARI avait à sa disposition les formules de CARDAN (dues à TARTAGLIA !) formules qui, dans certains cas (dits "irréductibles") exigeaient un passage par les nombres "impossibles". Pour les facilités du calcul informatique, proposons une méthode mixte :

Par le changement d'inconnue $y = Y + \frac{b}{3}$, (R) se transforme en une équation sans Y^2 : $Y^3 + pY + q = 0$ (R').

◊ Si $\Delta = 4p^3 + 27q^2 \geq 0$ alors (R') a une seule racine réelle Y_0 donnée par les formules de CARDAN :

$$Y_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{27}}} .$$

◊ Si $\Delta = 4p^3 + 27q^2 < 0$, p est négatif et le changement $Y = Z\sqrt{\frac{-4p}{3}}$ transforme (R') en $P(Z) \equiv 4Z^3 - 3Z - \frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}} = 0$ (R'').

Or, l'hypothèse $\Delta < 0$ implique $-1 < \frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}} < 1$ et l'étude de P(Z) montre que les trois racines réelles de (R'') sont comprises entre (- 1) et (+ 1); on peut donc poser $\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}} = \cos\psi$ avec $\psi \in]0 , \pi[$, $Z = \cos\theta$ et (R'') s'écrit alors : $\cos 3\theta = \cos\psi$ d'où les trois racines de (R'') puis les trois racines de (R') : $Y_k = \sqrt{\frac{-4p}{3}}\cos\left(\frac{\psi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$ avec $k \in \{0 , 1 , 2\}$. On choisit l'une de ces racines pour valeur de Y_0 .

Il suffit de suivre cette théorie pour écrire un programme informatique, programme que nous proposons en QUICK-BASIC (Version 4.0) mais que nous tenons à la disposition de tout collègue intéressé en GW BASIC ou en TURBO PASCAL.

PROGRAMME EN QUICK-BASIC

```
DEBUT
        CLS
        CONST PI = 3.1415926535#
    REM SAISIE DES COEFFICIENTS
        FOR I = 4 TO 0 STEP -1
            PRINT "ENTREZ LE COEFFICIENT DE X^ "; I: INPUT A(I): CLS
        NEXT I
    REM NORMALISATION
            A = A ( 3 ) / A ( 4 ) : B = A ( 2 )/ A ( 4 ) : C = A ( 1 ) / A ( 4 ) : D = A ( 0 ) /
A ( 4 )
    REM EQUATION REDUITE
            BB=B - 3 * ( A ^ 2 ) / 8 : CC = C - ( A * B / 2 ) + ( A ^ 3) / 8 : DD = D - ( A
* C / 4 ) + B * ( A ^ 2 ) / 16 - 3 * ( A ^ 4 ) / 256
    REM EQUATION RESOLVANTE
            AAA = -BB: BBB = -4 * DD: CCC = 4 * BB * DD - CC ^ 2
    REM CALCUL P,Q,DELTA
            P = BBB - ( AAA ^ 2 ) / 3
            Q = CCC - AAA * BBB / 3 + 2 * ( AAA ^ 3 ) / 27
            DELTA = 4 * ( P ^ 3 ) + 27 * ( Q ^ 2 )
    REM RACINE DE LA RESOLVANTE
        IF DELTA >= 0 THEN
            U = ( -Q + SQR(DELTA / 27 ) ) / 2: V = ( -Q - SQR(DELTA / 27 ) ) / 2:
Y0 = SGN(U) * (ABS(U) ^ (1 / 3)) + SGN(V) * ABS(V) ^ (1 / 3)) - AAA / 3: GOTO
CALCM
        ELSE
            PSI = 3 * Q * SQR(3) / 2 / P / SQR(-P)
        END IF
        IF PSI > 0 THEN
            PSI = ATN(SQR(1 - PSI ^ 2) / PSI)
        ELSEIF PSI = 0 THEN
            PSI = PI / 2
        ELSE PSI = PI + ATN(SQR(1 - PSI ^ 2) / PSI)
        END IF
            Y0 = 2 * SQR(-P / 3) * COS(PSI / 3) - AAA / 3
    REM CALCUL DE M,N,D1,D2
CALCLM:
            M = SQR(Y0 - BB)
        IF M = 0 THEN
            N = SQR((BB ^ 2) / 4 - DD)
        ELSE
            N = -CC / M / 2
        END IF
            D1 = M ^ 2 - 2 * Y0 + 4 * N: D2 = M ^ 2 - 2 * Y0 - 4 * N
```

```
REM  CALCUL DES RACINES
    IF D1 >= 0 THEN
        X1 = (M + SQR(D1)) / 2 - A / 4: X2 = (M - SQR(D1)) / 2 - A / 4
        PRINT "X1=" ; X1
        PRINT "X2=" ; X2
    ELSE
        X1 = M / 2 - A / 4: X2 = SQR(-D1) / 2
        PRINT "X1=" ; X1; "+"; X2; "*i"
        PRINT "X2="; X1; "-"; X2; "*i"
    END IF
    IF D2 >= 0 THEN
        X1 = (-M + SQR(D2) / 2 - A / 4: X2 = (-M - SQR(D2)) / 2 - A / 4
        PRINT "X3="; X1
        PRINT "X4="; X2
    ELSE
        X1 = -M / 2 - A / 4: X2 = SQR(-D2) / 2
        PRINT "X3="; X1; "+"; X2; "*i"
        PRINT "X4="; X1; "-"; X2; "*i"
    END IF
REM BOUCLE D'ATTENTE
        DO
        LOOP WHILE INKEY$ = " "
        GOTO DEBUT
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M.ARNAUDIES - H.FRAYSSE : *Cours de mathématiques* , Tome 1.Algèbre (Dunod Université)

[2] J.CASSINET - M.SPIESSER - R.CASSINET : *Equations du 4ème degré* (IREM de Toulouse)