L'avenir de l'enseignement des mathématiques n'est pas un long fleuve tranquille : confrontations culturelles, confrontations disciplinaires, confrontations dans les métiers d'enseignement

Jean Dhombres

Parler du futur de l'enseignement des mathématiques, ce n'est pas seulement faire un bilan critique de l'aujourd'hui de cet enseignement. Il s'agit de trouver des lignes directrices, à partir de ce qui se faisait hier, et même dans un passé plus lointain. En reconnaissant que l'enseignement change selon des lois d'un développement épistémologique encore assez mal décryptées, et guère mieux éclairées si l'on parle d'enjeux sociaux. Dans le doute, j'ai choisi de poser des questions d'un futur à partir d'un constat de confrontations : cela ne peut surprendre que ceux qui espèrent contradictoirement que la mathématique soit à la fois une discipline consensuelle, et une discipline à part. Je suis sûr au contraire que les confrontations auxquelles ont le plus souvent dû se soumettre les enseignants de mathématiques ne cesseront pas dans le futur, et il me paraît utile de prévoir les nouvelles confrontations auxquelles les mathématiques seront soumises en tant qu'elles sont enseignées à l'école, au collège, au lycée et tout autant à l'université.

La confrontation la plus ancienne, mais qui risque de devenir la plus aiguë si rien ne change, est celle de l'utilité des mathématiques. Je ne vais pas cesser d'en parler, mais il faut dire aussitôt qu'il n'y a aucun jugement de relativisme porté sur les mathématiques à afficher d'emblée que l'utilité dépend de chaque période historique et de chaque strate de civilisation, et qu'est alors essentielle la représentation des mathématiques qui passe dans la tête d'une majorité ou seulement chez certains qui ont un pouvoir culturel. Pensons-nous que l'utilité ait le même sens pour la dernière impératrice douairière de Chine, Ci Xi, qui exhortait à la fin du XIXe siècle les Chinois à n'apprendre des Occidentaux que leurs mathématiques car elles régissaient leurs techniques, et pour Ignace de Loyola qui, au milieu du XVIe siècle, tenait à ce que tout postulant jésuite reçût un fort enseignement de mathématiques pour se garantir de raisonnements fallacieux sur des chimères philosophiques, ou théologiques. On constate alors que l'un des premiers livres européens, traduit en chinois dès 1607 pour favoriser le contact entre les civilisations, a été les *Éléments* d'Euclide, d'après la version latine commentée qu'avait donnée Clavius. Ce dernier était le professeur de mathématiques rêvé par Ignace de Loyola pour le Collège

(*) Directeur d'études au CNRS et à l'EHESS, Centre Alexandre Koyré,
Jean.dhombres@damesme.cnrs.fr

romain, et il contribua à la *ratio studiorum*, réglant ou donnant une norme pour l'enseignement de tous les collèges jésuites dans le monde entier.

Qui dit règle des études dans les collèges indique suffisamment qu'il y avait, et ce aussi bien pour les mathématiques, des équilibres à établir, et que ceux-ci n'étaient pas évidents car il y avait des confrontations, qui ne se réduisent pas à l'époque à la confrontation entre le genre mathématique et le genre philosophique, entre les humanités et un savoir moderne. Fallait-il par exemple enseigner l'algèbre des équations, alors qu'aucun exposé n'était satisfaisant, ou la trigonométrie et ses tables numériques, voire les logarithmes, alors même que les calculs paraissaient relever d'autres catégories professionnelles, et étaient jugés indignes du petit nombre de ceux qui suivaient un cursus universitaire. La question portait aussi sur le changement qui touchait la civilisation européenne, une division chrétienne faut-il rappeler, où l'on tablait sur une réduction marchande du monde en termes de quantité, de production de taux d'intérêt, etc. À la fin du XVII^{e} siècle, c'est une nouveauté, la mathématique se représente à elle-même comme « science des quantités », science de ce qui est susceptible de plus ou de moins !

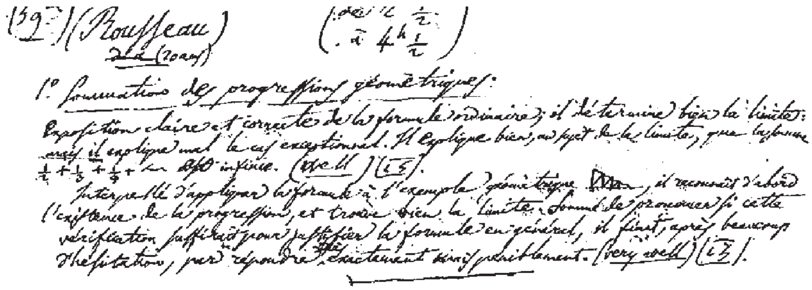
Mathématiques et enseignement des mathématiques

En cette réunion de Clermont-Ferrand où l'APMEP mobilise avec succès tant d'enseignants, je dois évidemment distinguer les mathématiques enseignées des mathématiques. Il faut prendre cette précaution d'analyse pour le futur si l'on a déjà pris soin de constater que la plus grande partie de la production mathématique mondiale, celle qui se lit dans les journaux spécialisés, ne sera jamais enseignée. D'ailleurs, n'en a-t-il pas toujours été ainsi du point de vue relatif, alors même que dans les siècles passés la production mathématique était bien moindre. On a l'impression que, dans une majorité d'universités avant 1600, seul le premier livre des *Éléments* d'Euclide était enseigné, sur les treize qu'ils comportent, voire quinze selon une certaine tradition. On terminait donc par le théorème de Pythagore et sa réciproque, qui est largement un début aujourd'hui. Autrement dit, penser l'enseignement des mathématiques comme une vulgarisation de la mathématique qui réussit, c'est s'empêcher de comprendre le rôle de cette communauté bien spécifique, mais si nombreuse aujourd'hui dans tant de pays, des enseignants de mathématiques, pris entre des traditions de l'enseignement et le contact avec des mathématiques en changement. Toute la question devient celle des choix effectués, et plus encore des façons de changer ces choix : bref la question pourrait devenir celle de savoir ce qui détermine cette communauté. Car il y a aussi, à côté ou en plus, la représentation des mathématiques dans les milieux savants, comme dans la société en général.

Il me semble donc qu'il y avait de la clairvoyance à intituler Association des professeurs de mathématiques l'organisation qui nous réunit, et de ne pas prendre un titre générique, imposé par le scientisme des années de création de la Société mathématique de France dans le dernier tiers du XIX^{e} siècle. D'ailleurs au niveau international, on maintient la spécificité professionnelle : on parle de Congrès international des mathématiciens depuis la toute fin du XIX^{e} siècle, et non de Congrès international des mathématiques. Aussi bien, comme toute communauté, les professeurs de mathématiques sont traversés par des enjeux culturels, des enjeux disciplinaires, et des enjeux au sein même du métier d'enseignement. La mémoire organisée et rationalisée de la résolution de ces enjeux, sous forme de programmes précis, et surtout sous forme de pratiques d'enseignement toujours précaires et renouvelées devant une classe, constitue l'histoire de l'enseignement des mathématiques, sur laquelle nous n'avons guère de travail sérieux et suffisamment utile pour la « communauté » que j'essaie de cerner. J'aimerais donc débuter par un exemple bien documenté, celui d'un solitaire qui néanmoins essayait de penser l'enseignement des mathématiques comme un fait social original.

Les notations d'Auguste Comte comme examinateur d'entrée à l'École polytechnique au milieu du XIX^{e} siècle

Voici, ci-dessous, lors d'interrogations pour l'entrée à l'École polytechnique dans les années 1840, les notes bien tenues par l'examinateur qu'est Auguste Comte, qui a déjà publié son *Cours de philosophie positive* et bien posé son programme philosophique. Le questionnement dure deux heures et c'est un extrait de la fiche manuscrite, suivi d'une transcription imprimée.


(Rousseau)

1° Sommation des progressions géométriques:
Exposition claire et correcte de la formule ordinaire; il détermine bien la limite: mais il explique mal le cas exceptionnel. Il explique bien, au sujet de la limite, que la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ est infinie. (Well) (ιζ).
Interpellé d'appliquer la formule à l'exemple géométrique, il reconnaît d'abord l'existence de la progression, et trouve bien la limite. Sommé de prouver si cette vérification suffirait pour justifier la formule en général, il finit, après beaucoup d'hésitation, par répondre très exactement mais péniblement. (very well) (ιζ).

1° *Sommation des progressions géométriques.*

Exposition claire et correcte de la formule ordinaire. Il détermine bien la limite; mais y explique mal le cas exceptionnel. Il explique bien, au sujet de la limite, que la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots$ est infinie. (*Well.*)

Interpellé d'appliquer la formule à l'exemple géométrique [Ici une figure signifiant : du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle mener une perpendiculaire à l'hypoténuse; du pied de cette perpendiculaire, en mener une au plus grand côté du triangle; du pied de cette seconde perpendiculaire mener une nouvelle perpendiculaire à l'hypoténuse, du pied de celle-ci au côté et continuer ainsi indéfiniment,  il reconnaît d'abord l'existence de la progression et trouve bien la limite. Sommé de prouver si cette vérification suffirait pour justifier la formule en général, il finit, après beaucoup d'hésitation, par répondre très exactement, mais péniblement. (*Very well.*)

Le transcripteur, Pierre Laffitte, « disciple » par excellence de Comte, n'a pas jugé utile de transcrire la dernière notation en grec ($\iota\zeta$) de Comte, qui est un système de repérage de l'examinateur pour classer les étudiants. Ce classement est pour lui essentiel, puisque l’examen oral que Comte fait passer est le seul requis pour l’entrée. Comte a cette vue particulière qu’il doit être capable de discerner, à partir des attitudes mathématiques d’un candidat, si ce dernier a les capacités, et à quel degré, pour participer à la transformation de la France en pays de progrès, en marche vers l’âge positiviste. Sourions comme nous voulons de cette prétention, mais reconnaissons qu’elle témoigne d’une grande prise au sérieux de la qualité de l’enseignement des mathématiques, et qu’elle joue d’une sorte de représentation des mathématiques qui tient aux seules mathématiques.

Pour Auguste Comte, avec cette question qu’il pose à un candidat à partir d’une figure qu’il reproduit, il s’agit de comprendre ce qu’est la somme d’une progression géométrique infinie, mais également de juger une forme de rigueur. La rigueur, bien sûr liée à un état de la mathématique, ne se déduit pas par un en dehors des mathématiques, qu’il s’appelle logique, ou applicabilité. Comte fait appel à la tradition, ce qui n’était pas du tout le cas des cours de son époque, qui avaient adopté la théorie de la convergence à la Cauchy, ou si l’on veut dire autrement faisaient des « mathématiques modernes », enfin modernes pour leur époque. Toute la théorie d’une progression géométrique tient en fait dans la moyenne géométrique, et c’est ce qu’exprimait déjà François Viète en 1593. En ce sens qu’il suffit de définir une telle progression comme celle selon laquelle tout terme sauf le premier, est moyenne géométrique entre son prédécesseur et son successeur. Si a est le premier terme, b le second, c le troisième, etc., on dispose de l’écriture

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\ldots$$

Et si l’on pose $b = ax$, x étant par définition la raison de la progression, les termes successifs de la progression paraissent sous la forme

$$a,\ ax,\ ax^2,\ ax^3,\ \ldots,\ ax^n,\ \ldots$$

La formule est alors

$$a+ax+ax^2+ax^3+\ldots+ax^n+\ldots=\frac{a}{1-x}.$$

Une représentation géométrique permet de calculer la somme des termes d’une progression géométrique, et c’est celle vue comme des zigzags dans les notes d’interrogation de Comte. Elle consiste à fixer un triangle, et à prendre un point D sur la droite BC, puis à tracer une droite DE parallèle à AC et coupant AB en E, et une droite EF parallèle à BC coupant AD en F, etc. Viennent ainsi en va-et-vient selon le choix des parallèles les points G, H, I, J, etc. Les longueurs BD, EF, GH, IJ, …, constituent une progression géométrique.

Pour le démontrer, et c’est ce qu’attend Comte de l’élève, il suffit de montrer que EF est moyenne géométrique entre BD et GH. En effet, comme la construction est itérative, c’est-à-dire répète la même situation, GH aussi sera moyenne géométrique entre EF et IJ, etc. Ce qui, par définition, suffit à établir la progression géométrique.

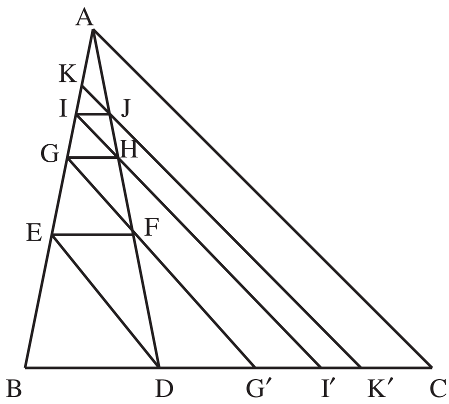


Figure 1

Pour montrer que EF est moyenne géométrique entre BD et GH, il suffit d'utiliser plusieurs fois le théorème dit de Thalès sous la forme usant de proportions. Par le parallélisme de EF et BD, on lit dans les triangles semblables ABD et AEF une proportion :

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{DA}}. \tag{1}$$

Par le parallélisme de DE et FG, on lit dans les triangles semblables AED et AGF une proportion qui fait suite à (1) :

$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{GA}}{\mathrm{EA}}. \tag{2}$$

Par le parallélisme de EF et GH, on lit dans les triangles semblables AEF et AGH une proportion qui fait suite à (2) :

$$\frac{\mathrm{GA}}{\mathrm{EA}} = \frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{EF}}. \tag{3}$$

De telle sorte que de (1), (2) et (3) on déduit la moyenne géométrique attendue, et la progression géométrique :

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{EF}}. \tag{4}$$

Reste à calculer la valeur du rapport commun, et à exprimer la longueur BC, valeur rendue évidente par la figure de la somme de tous les termes de la progression géométrique. Ce dernier résultat se voit en prolongeant les parallèles GF, IH, KJ, etc., jusqu'à leurs intersections G′, I′, K′ avec la droite BC. La longueur EF se reporte en DG′, GH en G′I′, IJ en I′K′, etc. Les triangles semblables déjà utilisés donnent facilement l'enchaînement des proportions suivantes, $\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{BA}}$ et $\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BC}}$. De sorte que si l'on pose $\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BC}} = x$ pour repérer la position du point D sur BC, on dispose par ce rapport x, de la raison de la progression géométrique qui est aussi x. Notant BD = a, on déduit en effet une écriture mêlant une notation géométrique et une notation algébrique :

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^n + \ldots = \mathrm{BC}.$$

En fait[1], on peut aisément exprimer BC à partir de a et de x, puisque $\dfrac{\mathrm{BC}-\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BC}} = x$. Soit $\mathrm{BC} = \dfrac{a}{1-x}$, de sorte que l'on a la formule annoncée :

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots + ax^n + \ldots = \frac{a}{1-x}.$$

La beauté de cette formule n'est pas dans son existence, mais dans la simplicité de son expression pour désigner ce qui peut tout de suite s'interpréter. Ainsi, la division par $(1 - x)$ devient une opération concevable comme une série, usant de l'addition et de la multiplication. La division est même débarrassée de la retenue qui est son caractère usuel dans le système décimal. On y lit : 0,999 999 … = 1. De sorte qu'avec la formule finale, il n'y a pas seulement un rendu de la théorie des proportions, mais une étonnante plus-value. C'est ce qu'a vu Newton inventant la méthode des fluxions à partir de cette constatation. Passait ainsi au second rang la figure qui a prévalu pour cette démonstration, parce qu'elle ne rendait pas prévisible le résultat. Désormais, c'est l'ordre algébrique des séries qui apparaît le plus intéressant, donc le plus élégant. On pourrait dire que cet ordre des séries, parce qu'il est algébrique, tue la théorie des proportions.. Il la rend au moins obsolète, et la manière dont la formule sur la progression géométrique a été obtenue devient dangereuse pour un enseignement visant un nouvel objectif. Je n'ai donc pas expliqué la façon dont la formule est obtenue aujourd'hui, car tout le monde sait qu'il faut procéder en deux temps : faire intervenir une sommation pour un nombre fini de termes (fixer n), puis passer à la limite. Même le premier temps paraît algébrique, sans nécessiter le recours à une figure, et sans proportion. Alors même que la démonstration d'Euclide de ce premier temps, si elle ne requiert pas de figure, est basée sur les proportions, comme je conseille à chacun d'y aller voir, ce qui fait mesurer la portée de l'algèbre.

Il paraît bien plus juste à Comte, historiquement et du point de vue de l'épistémologie, de voir comment la théorie des séries ainsi devenue prédominante a englobé la théorie des proportions illustrée par la géométrie, en permettant à la notion même de nombre réel de devenir exemplaire[2], puisque résumant le procédé limite avec l'écriture décimale. Autrement dit, par ses questions au candidat, et revenant à ce que l'on peut qualifier d'expérience imagée des proportions, Comte l'oblige à analyser la modernité du savoir acquis sur les séries entières, et donc l'analyse algébrique fondée par une analogie du décimal. Il juge la capacité du candidat à

(1) Quiconque a travaillé la théorie des proportions illustrée par la géométrie, apprécie que le raisonnement par triangles semblables qui donne la raison de la suite géométrique des segments comme rapport de EF à BD soit aussi celui qui le donne évidemment comme rapport de DC à BC.

(2) Ai-je besoin d'ajouter que c'était avant la construction des réels par procédé ensembliste !

repenser ses connaissances, à les retrouver par un biais historique inattendu.

Il s'insurge aussi contre un dévoiement de la pratique du *professeur de mathématiques* de son époque. L'image de la figure 1 avait en effet disparu depuis longtemps des manuels qui pourtant avaient longtemps misé sur les proportions, puis étaient hardiment passés à l'algèbre symbolique. C'est en philosophant sur ce qui est relatif, et en historicisant le relatif pour permettre l'expression du progrès, c'est aussi en refusant le symbole sans qu'un sens soit associé à une pensée longuement mûrie, que Comte donnait sa valeur didactique à une histoire des mathématiques. Je crains que l'on n'ait que trop oublié cet apport majeur du positivisme pour l'enseignement des mathématiques et ses changements, et beaucoup reste à faire pour adapter cette méthode à l'enseignement actuel qui a du mal à dire son utilité. Car cet enseignement ne se place pas dans une vision d'épistémologie, qu'elle soit historique ou autre, qui permette à un élève de juger de l'avantage des méthodes qu'on lui enseigne.

Il me faut conclure cet exemple en remarquant que tous les témoignages établissent que les professeurs de mathématiques, surtout ceux des classes préparatoires aux grandes écoles, ont alors bien compris la leçon de Comte, au moins jusqu'à la première guerre mondiale. La communauté des enseignants avait en quelque sorte son leader intellectuel. L'avènement d'une mathématique de type axiomatique, car faisant découvrir des phénomènes inconnus comme la position relative dans l'espace et la topologie, a ruiné le positivisme, et transformé les enseignants de mathématiques de la seconde moitié du XXe siècle en spécialistes d'une seule façon de voir. Il me reste alors à préciser les conditions dans lesquelles cette communauté se fit à l'origine, avant Comte même, et je vais pour faire court me cantonner au cas français.

La place du professeur de mathématiques a été conquise

Ne faisons pas de contresens historique : les universités médiévales et renaissantes, si elles enseignent des mathématiques au premier niveau, celui du *quadrivium* qui touche des jeunes entre treize et seize ans, ne comportent pas comme fonction un « professeur de mathématique ». Le plus souvent, ce sont les étudiants les plus âgés, ceux qui veulent poursuivre leurs études, qui servent de répétiteurs dans un système qui a quelque chose à voir avec l'enseignement mutuel. C'est en Angleterre un don privé qui permet de créer la chaire lucasienne à Cambridge sur laquelle est nommé Barrow, puis Newton, qui tous les deux constatent combien le niveau des études mathématiques est bas chez les étudiants. C'est en France le roi François Ier, qui crée sur ses deniers le poste de professeur royal de mathématiques, qu'occupe aussitôt Oronce Finé vers 1530, avec comme tâche de donner du lustre à cette discipline : le professeur royal se fixe l'écriture d'un manuel de base, la *Protomathesis* dont l'envergure encyclopédique unifiée est remarquable(3). Mais les « universitaires » n'apprécient pas du tout la perte de leur monopole. D'ailleurs, le *quadrivium* met deux bons siècles pour mourir, ayant un mal fou à insérer dans le curriculum l'algèbre, les logarithmes et les calculs trigonométriques, la perspective,

(3) Jean Dhombres, La mise à jour des mathématiques par les professeurs royaux, in A. Thuillier (dir.), *Histoire du collège de France*, vol. I, La création 1530-1560, Fayard, 2006, p. 377-420.

mais aussi bien la théorie des nombres. Faut-il parler de nécrose de l'enseignement ? Il y a surtout maintien sur le long terme d'un objectif de formation élémentaire par les mathématiques, et profonde gêne universitaire à observer que la philosophie naturelle sort complètement transformée de l'association, réussie par Galilée, des mathématiques à l'expérimentation physique.

Dans les collèges au XVIII^{e} siècle, les mathématiques au sens des *Éléments* d'Euclide, ou au sens de la géométrie spatiale et de la trigonométrie sphérique de l'astronomie, est partout optionnelle. Cette solution d'option pour les mathématiques est plus qu'une tentation dans de nombreux pays, dont un temps l'Angleterre sous Thatcher. Aussi bien c'est de musée que l'on parle en 1795, à la jeune École polytechnique, lorsque l'on évoque le *Cours de mathématiques* de Étienne Bézout, débuté en 1764, cours qui avait pourtant été fondateur d'un nouveau type d'enseignement dans les écoles d'ingénieurs militaires, comme l'école royale du génie à Mézières, et où intervenait l'algèbre, en position tierce après l'arithmétique et la géométrie, mais où s'agrégeaient aussi des éléments de calcul différentiel. L'expérience de la révolution française, avec la création des écoles centrales et l'établissement d'un curriculum entier pour les mathématiques, a totalement changé la donne de l'enseignement. Intervient la création des lycées en 1802 : les mathématiques et le latin deviennent les deux piliers de l'enseignement. Du coup, un corps professoral naît, chargé explicitement des mathématiques. C'est ce corps qui suscite les programmes, et par exemple, invente la notion de « géométrie élémentaire », avec ce mélange de calculs qui ne sont pas tout à fait algébriques et de raisonnements euclidiens. Nombreux sont les mathématiciens parmi les premiers inspecteurs généraux nommés. Voilà la naissance d'une communauté, qui réussit à avoir son propre journal dès 1810, les *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Il est tout à fait normal que ce soit le lieu où l'on discute de la représentation géométrique des quantités imaginaires, des démonstrations de la formule du binôme de Newton, etc. Un genre est en place, qui connaîtra certes des évolutions, mais se maintiendra jusque dans les années 1950.

Je tenais à faire cette trop courte histoire(4), pour montrer que ce sont les mathématiciens qui ont dû conquérir leur place dans l'enseignement, et qu'ils n'ont pas laissé à d'autres le soin de dire le sens de ce que devait être leur enseignement. Toute la première moitié du XIX^{e} siècle voit donc se développer une confrontation entre les mathématiques et les Humanités, et bien sûr une logorrhée de discours prônant la réconciliation. L'utilité n'est certes pas une notion mathématique, mais les enseignants de mathématiques défendaient doublement leur position, à partir du choix d'une mathématique particulière à enseigner, et à partir d'une conception largement laïque de cet enseignement, requérant une certaine combativité pour éliminer toute influence religieuse.

Se posait alors la question de savoir ce que faisait effectivement le mathématicien, s'il était un décrypteur du monde réel, ou s'il raisonnait librement en

(4) Voir pour plus, Jean Dhombres : « la modélisation doit-elle être la partie vive de l'enseignement des mathématiques ? Les leçons d'une histoire du professeur de mathématique en tant que metteur en scène », in Quelles mathématiques au lycée ? Actes du colloque de Limoges, Irem de Limoges, 2006.

créant des conventions. Comme la tradition mathématique la plus ancienne est l'élimination de la philosophie de son discours explicite, ce qui ne veut pas dire qu'une philosophie ne soit pas directrice à l'intérieur même de l'acte mathématique, j'ai maintenant envie de montrer comment un enseignement traite une innovation. Je le fais par un second exemple à partir de l'utilisation de figures, dont j'ai déjà discuté dans le premier exemple. L'innovation est la géométrie analytique, qui fait disparaître de fait une grande tradition de l'enseignement, celle de la géométrie euclidienne.

L'image analytique, ou l'imposition d'une convention

Je caractérise alors comme insuffisante une figure analytique. Insuffisante en ce qu'elle appelle moins un commentaire ou une connaissance à la manière des allégories, que la présence d'une langue qui dise sans ambiguïté ce qu'il y a à voir et jusqu'à l'indication d'un calcul possible. Mais pas nécessairement son résultat, qui doit être néanmoins pressenti si l'on ne veut pas simplement dire qu'il y a une figure géométrique, même si cette dernière expression n'a pas un sens historique pérenne. En tout cas il n'est pas possible de considérer une figure analytique comme une image dont la compréhension tient à la seule image. Ainsi, je pars d'une des figures que René Descartes présente dans sa *Géométrie* au livre II[5]. Dire d'emblée qu'il s'agit d'une figure typique de mathématique, c'est avouer une postérité sans voir une origine. Cette origine n'est pas dans la répétition des lettres autour de lignes tracées puisque toutes les figures euclidiennes sont ainsi marquées, et nous l'avons vu aussi bien avec la figure 1 sur la série géométrique. Mais je donne d'abord à voir, et commenterai ensuite.

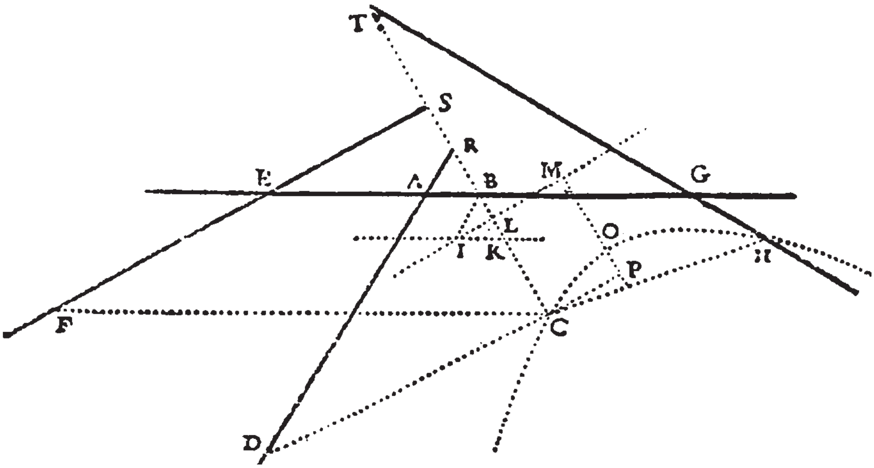


Figure 2

(5) René Descartes, *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Météores, et la Géométrie qui sont des essais de cette méthode*, Leyde, I. Maire, 1637, p. 331. Je prendrai désormais la référence à l'édition des *Œuvres de Descartes*, Paris, réédition Vrin, 1996, 6, p. 331.

Le lecteur d’aujourd’hui qui ne connaîtrait pas le problème de Pappus ici illustré (et ce problème, que l’on expliquera plus loin, n’est plus parmi ceux évoqués dans un cours de mathématiques dans l’enseignement secondaire ou universitaire), voit d’abord sur cette image des tracés différents. Il y a des lignes grasses pour quatre droites dont certaines paraissent se poursuivre, d’autres s’arrêter comme bloquées par d’autres lignes, et des lignes en pointillés pour d’autres droites ou segments avec la même ambiguïté donc, et pointillés aussi pour une courbe, la seule courbe dans ce dessin. Pointillés et traits pleins n’ont pas de tout temps existé dans les figures géométriques. Descartes n’est pas le premier à les utiliser, mais un demi siècle plus tôt on ne les trouvait pas dans les ouvrages imprimés, et d’ailleurs la roue dentée qui permet de les tracer n’était pas encore utilisée. Le lecteur voit aussi une famille de lettres en majuscules, au moins la moitié de l’alphabet est utilisée jusqu’à T, à l’exception de J, N et Q, exception que rien ne permet de comprendre. Mais le lecteur d’aujourd’hui est habitué à ne pas donner un sens à la succession de lettres ; le lecteur du XVII^e siècle associait la succession alphabétique à l’ordre de construction de la figure. Cet ordre est-il lisible sur la figure ? Je pense que Descartes n’a pas souhaité que cet ordre fasse sens. Pourquoi ? Pour appeler l’attention de son lecteur sur un autre ordre.

Difficulté de toute figure mathématique, elle se voit d’un coup, et au contraire n’est pas visible la temporalité du tracé, l’ordre dans lequel on a tracé, et ainsi l’ordre de la construction. L’ordre alphabétique est ici illusoire. De la courbe en pointillés, le plus simple parce que c’est l’ordre que Descartes nous a appris sur les courbes, est de dire qu’il s’agit d’une parabole. Le regard peut en juger. Aucun élément intrinsèque à la courbe présentée ne permet de décider : ni foyer, ni directrice, ni cône à base circulaire dont cette parabole pourrait être la section plane selon la reconnaissance géométrique traditionnelle depuis Apollonios. Aucune allusion savante, ou citation dans l’image même. Que l’on puisse dire, « bien sûr » c’est une parabole, tient à l’œuvre de Descartes, et à la banalisation du regard qu’elle a imposée chez les mathématiciens, et presque dans tout le monde scientifique.

Pour l’expliquer, je dois utiliser des termes techniques. Mais ce que je dois montrer d’abord est l’insuffisance de l’image en elle-même, et pourtant son interprétation quasi immédiate lorsque l’on dispose du bon repère et du bon repérage, donc du bon dictionnaire. On dira qu’il en est ainsi avec tout emblème, ou tout symbole. Je ne le crois pas : si le repérage cartésien est devenu un universel du regard mathématicien, c’est qu’il était comme émergent dans la mathématique euclidienne, clarifié pourrait-on dire par Descartes et ainsi banalisé. La banalisation n’est pas mince entreprise, et peut-être dite une révolution, mais il est très difficile de la reconnaître, une fois la révolution apprivoisée[6].

Qu’est-ce donc qui nous fait dire, par exemple, que la figure de Descartes est de géométrie plane, et que les pointillés, ces indications absentes du texte euclidien comme de la pratique éditoriale avant le XVII^e siècle, ne peuvent en aucun cas être celles d’une ligne qui ne devrait pas être vue par le lecteur, car cachée par un plan ou un autre solide comme en géométrie dans l’espace ? Qu’est-ce qui nous assure que

(6) Jean Dhombres, « La question du repère chez Descartes, et dans la postérité cartésienne », *Réminisciences*, 4, 2000, p. 27-78.

les droites en gras se coupent réellement et ne sont pas des droites dans l'espace, alors que tous les points d'intersection pour les droites en pointillés ne sont pas notés par une lettre de l'alphabet ? Par quel mécanisme de la pensée tout un chacun reconnaît-il que la figure exhibe la façon dont est engendrée la parabole en pointillés ? D'où vient l'assurance de celui qui n'a jamais lu Descartes et sa *Géométrie* que le calcul équivaut à cette figure ?

La figure qu'offre Descartes ne requiert pas cette subjectivité : elle se voit comme représentative d'une situation intrinsèquement plane. Ai-je raison de prononcer le mot « représentation » ? Si le mot vient très vite aux lèvres, c'est que la parabole qui a été détectée, ou plutôt soupçonnée, est emprisonnée dans un réseau de droites. Et que ces droites, en pointillés, dessinent les repères possibles. Ce sont des repères cartésiens auxquels tous les esprits se sont habitués depuis l'invention de Descartes ; et qui dit repère dit alors représentation cartésienne de la parabole. En ce sens là, aujourd'hui, nous avons moins besoin de regarder que d'associer les mots. C'est par la géométrie analytique comme *habitus mentis* que nous voyons désormais.

Je ne pense pas que l'historien, ou le lecteur minutieux de Descartes, ajouterait grand chose en faisant remarquer que le repère choisi dans cette figure de la *Géométrie* est quelque peu problématique. En ce sens que s'il est bien composé de la ligne grasse EABG, l'autre direction BC fait question. Puisque l'œil distingue que le point C est un point courant sur la parabole, et ainsi un point variable. Toutefois la direction BC elle-même est fixe : mais comment représenter en pointillés une fixité de direction, si la droite BC est variable quoique toujours parallèle à elle-même. C'est en tout cas l'une des conditions du problème de Pappus à quatre droites que la figure expose, que soient fixés les angles sous lesquels du point C sont vues les quatre droites dessinées en gras (par exemple l'angle de CB avec EG, de CD avec AD, de CF avec FS et enfin de CH avec HG).

Descartes ne fixe pas un repère, mais directement le repérage, c'est-à-dire une mesure par les coordonnées. Les conditions de l'analytique sont une grille de l'espace plan où un point est la donnée de deux nombres. Le texte est précis, désignant une longueur par la lettre x et une autre par la lettre y.. C'est une première de l'histoire des mathématiques.

> Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A & B, soit nommé x & que BC soit nommé[7] y.

On peut difficilement écrire de façon plus courte l'invention des coordonnées cartésiennes. On remarquera cependant l'emploi par Descartes du subjonctif pour poser son système et sa convention de repérage. À la façon même d'Euclide au début de toute démonstration d'une proposition lorsqu'il place les lettres par écrit (que ABC soit le triangle …). Euclide procède ainsi pour particulariser un universel (un triangle, une droite, etc.) et il reviendra en fin de démonstration pour faire voir qu'il n'a pas failli à cette universalité, et que la figure quoique particulière n'a pas sur-réalisé le problème. On peut parler en ce sens d'un repérage chez Euclide. En plus, en posant le repérage, Descartes particularise l'espace. C'est-à-dire le fait être dans la conscience du mathématicien. Et c'est le contraire d'un réalisme, puisque c'est une

(7) Descartes, *La Géométrie*, p. 310.

convention qui permet la suite, à savoir le calcul. L'analytique à proprement parler vient après ; un calcul est conduit qui mesure explicitement toutes les autres longueurs de segments sur la figure, en termes de x et de y, en ajoutant au besoin des constantes pour les longueurs fixes. Vues donc comme indépendantes de x ou de y. Ai-je raison d'employer le verbe « voir » pour une propriété (indépendance) qui ne s'exprime ou ne se désigne que par l'algèbre ? Je pourrais aussi bien dire « écrites comme indépendantes de x ou de y », ou encore « comprises comme indépendantes de x ou de y ». Le « voir » dont j'ai parlé est une banalité. La figure ne porte ni ces mots, ni ces lettres x et y. Et si c'est en ce sens qu'elle peut être dite insuffisante, il suffirait de les rajouter pour que lecteur reconnaisse aussitôt la situation, et fasse aussi bien que Descartes. Il est impossible, aujourd'hui, de prétendre ignorer l'écriture de la géométrie analytique, et sa forme même. Nous vivons bien sûr la postérité de Descartes.

De sorte que j'avance sans hésitation que la seule vue, sur la figure, d'un réseau en pointillés comme IK, IB détermine aujourd'hui le genre analytique. Il ne pouvait en être ainsi du temps même de Descartes. Aussi, cet auteur, avec la figure ici reproduite, s'est-il ingénié à faire saisir, autant qu'un dessin pouvait le faire, une propriété essentielle de son repérage. Il en fait un théorème. À savoir que le genre de la courbe en jeu – celle tout de suite dite vue sur la figure comme parabole – ne dépendait pas du repérage adopté. À condition qu'il soit toujours cartésien, c'est-à-dire rapporté à deux directions non parallèles sur lesquelles sont mesurées algébriquement les longueurs, et ce que l'on appelle aujourd'hui un repère plan. Plusieurs tels repères apparaissent possibles sur la figure dès lors que l'on a compris le fonctionnement d'un repère ; que le choix soit indifférent pour la distinction en genre de la courbe est l'une des réussites de Descartes et seul, bien sûr, le texte de la *Géométrie* le démontre. Au terme d'un raisonnement qui fait toute la richesse et toute la force de la *Géométrie*. Un livre qu'il convient alors de qualifier d'algébrique.

Car ce qui est d'abord atteint, au terme d'un calcul par Descartes, c'est le fait que la distance(8) d'un point M de coordonnées (x, y) à une droite, soit une forme affine des variables, soit $ax + by + c$. Et cette forme est indépendante du repérage, en ce sens que ne changent que les constantes a, b, et $\boldsymbol{c}$ dès lors que l'on change de repère (de repère cartésien est-il nécessaire d'ajouter). Descartes calcule effectivement dans différents cas les coefficients a, b, c, pour bien voir la forme générale $ax + by + c$. Remarquons que ces constantes ne sont plus repérées par des quantités géométriques lisibles sur la figure : elles sont des nombres réels(9).

J'ai toujours été surpris par les affirmations d'historiens selon lesquels il aurait fallu attendre la fin du XVIIIe siècle pour que l'équation cartésienne d'une droite fût

(8) Chez Descartes, la notion de distance d'un point M à une droite AB doit d'abord préciser un angle que l'on se donne pour « voir » de ce point la dite droite, et ce n'est pas toujours un angle droit. Ce point de vue est nécessaire s'il veut faire comprendre les axes de référence qui ne sont pas nécessairement orthogonaux.
(9) Je me dois pour l'histoire de dire que Descartes distingue encore les signes, c'est-à-dire qu'il explique que l'on a des constantes a, b et c pour les valeurs des coefficients, qui sont des nombres positifs, mais que l'on doit mettre tous les signes possibles, + et −.

écrite[10]. Mais je m'explique cette reconstruction si tardive. Le premier degré, ou la linéarité, fut un geste tellement fondateur chez Descartes, et tellement lié au *système des coordonnées*, qu'on ne le voit plus comme exprimant une droite. L'expression $ax + by + c$, une distance, associe abscisse et ordonnée et les coordonne ; elle doit d'abord être perçue comme une ordonnée, c'est-à-dire une distance, dès lors que l'on rapporte l'espace à la droite que nous disons d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Et que Descartes n'a pas besoin d'écrire telle. Si j'ai utilisé l'expression de système de coordonnées, c'est parce qu'elle vient de Comte disant la postérité de Descartes, et ce penseur est fort habile à repérer la positivité d'une banalité comme celle du repère cartésien. On acceptera que la notion de distance comme forme linéaire des coordonnées est une banalité de la géométrie analytique, mais qu'il reste encore dans les classes du Secondaire à la faire acquérir.

Indéniablement, la figure est incomplète en ce qu'elle ne dit pas que cette distance est une telle forme. Il faut le savoir. À lui seul, ce repérage d'une distance par une forme affine résout le problème de Pappus. En ce sens qu'il fait « voir » la nature[11] de la courbe dessinée sur la figure 2. Pourquoi ? Par les conditions mêmes du problème de Pappus, qui sont de rechercher tous les points C tels que le produit des distances de C aux deux premières droites en gras (CD · CF), soit, à un facteur près, égal au produit des distances de C aux deux autres droites en gras (CT · CH). Un produit de deux formes affines étant du second degré, l'équation du problème, celle qui donne les coordonnées x et y du point courant M, est du second degré. C'est donc une conique. Moyennant l'étude de Descartes qui identifie conique et équation du second degré, au terme d'un raisonnement par épuisement des cas. C'est au livre second de la *Géométrie* que Descartes effectue cette vérification de tous les cas.

> De plus on voit ici que ce que j'ai pris pour le premier genre des lignes courbes, n'en peut comprendre aucunes autres que le cercle, la parabole, l'hyperbole, et l'ellipse, qui est tout ce que j'avais entrepris de prouver[12].

Et enfin que la conique soit une parabole tient au fait, cette fois visible à l'œil et non immédiatement déductible, qu'elle n'a qu'une branche, sans être fermée, donc ne peut être ni une hyperbole, ni une ellipse.

J'ai épuisé l'essentiel du raisonnement analytique élémentaire. J'ai distingué deux types de preuves. Le premier type, celui conduisant à une conique, tient à des formes algébriques dont on « voit » les combinaisons sur la figure dès qu'on interprète la langue du repérage (l'algèbre) ; celui réduisant à une parabole tient à ce

(10) La désignation d'une géométrie analytique ne vient pas du XVII^{e} siècle. Carl Boyer qui en fait l'histoire attribue le premier à Sylvestre-François Lacroix en 1796 (*History of Analytic Geometry*, New Dover edition, 1988). C'est que Lacroix publiant une *Géométrie descriptive*, à la suite du cours de Gaspard Monge à l'École normale de l'an III, avait besoin de distinguer la nouvelle forme de la géométrie, de l'ancienne forme, issue de Descartes. Auparavant, c'est-à-dire de 1637 à 1795, la géométrie analytique ne s'opposait pas à la géométrie euclidienne ; elle était autre, portant sur d'autres problèmes, mais n'en faisait pas moins oublier provisoirement l'ancienne géométrie (selon l'expression même de l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert, qui offre une entrée avec ce titre).

(11) C'est pour cette raison que le problème de Pappus fut choisi par Descartes : ce n'était pas un problème en attente de solution !

(12) Descartes, *La Géométrie*, p. 335.

que l’œil fait confiance au dessinateur, qui n’aurait par exemple pas oublié l’autre branche s’il s’était agi d’une hyperbole. Car, pour les coniques, il n’y a pas d’autres possibilités (voir ci-dessous la figure 3 de Kepler donnée en 1604 qui rassemble toutes les coniques sur un même plan et en indique comme une génération continue).

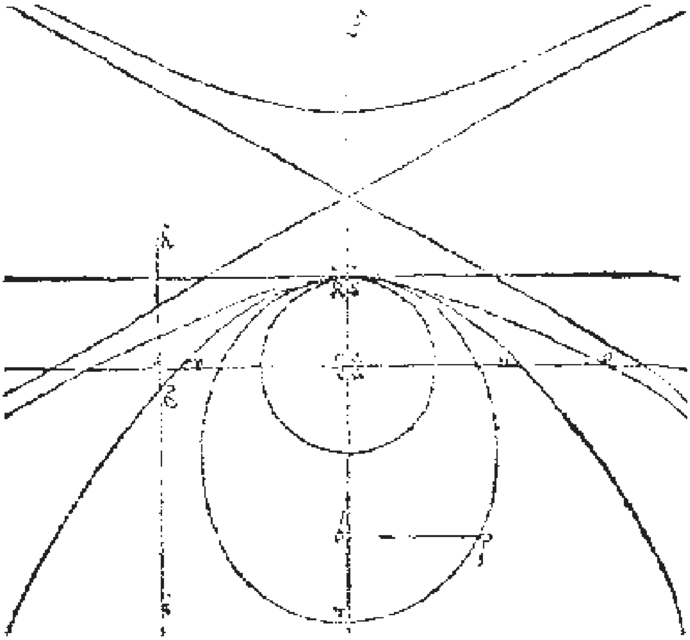


Figure 3

La figure analytique est bien incomplète au sens où une langue doit accompagner le repérage, en l’occurrence la langue algébrique, et qu’un repère doit alors se donner à voir comme signalant cette insuffisance, mais pour la combler aussitôt qu’elle est reconnue. La figure doit aussi être ressentie comme exacte pour que, sans gêne, la reconnaissance des formes puisse s’effectuer au sein des possibles offerts par l’algèbre même. Cette exactitude là, celle de la classification, caractérise ce qu’il faut de vrai pour une figure analytique, et c’est la référence à un savoir antérieur et à une vision.

En l’occurrence, on s’aperçoit alors que la figuration de la courbe donnée par Descartes ne peut qu’être fausse. En effet, la courbe en pointillés passe par H, qui est un point sur l’une des droites fixées du problème, la droite GH. Comme le problème de Pappus concerne les produits de distances, il faut donc que ce point H appartienne à une autre des droites. Ce qui n’est pas le cas du dessin. Cette erreur aperçue, que reste-t-il alors de l’analytique ? L’essentiel, à savoir que la courbe solution ne peut qu’être représentée par une équation cartésienne du second degré, et qu’il peut y avoir des cas dégénérés. Bref qu’il faut mieux calculer, mais pas mieux regarder la figure. De cette figure, on prend conscience que celui qui l’a dessinée n’a indiqué aucun des moyens du dessin. Sa figure n’a que pour but de faire voir l’analytique !

C’est le choix d’un repère qui fait ce qu’on appelle l’analytique. Le repère abolit en un premier temps la naturalité du réel et jusqu’à ce que la symbolisation doit au culturel. Le repère devient progressivement un habitus culturel. L’on requiert enfin l’analytique pour voir le repère qui fait vérité.

Le repère crée aussi un outil. Et c’est l’outil qui fait la différence d’un auteur à l’autre, et en mathématiques l’outil est directement lié à la pensée. Autrement dit, le repère fait l’analytique, le repérage fait les différents styles scientifiques de l’analytique. Le choix économique d’un certain type d’analytique dans l’enseignement secondaire, par exemple l’analytique cartésien et non l’analytique à la Desargues ou plus tard l’analytique du projectif, a l’inconvénient de ne montrer qu’une seule voie, et qu’un seul côté des choses. Un des défis de l’enseignement des mathématiques pour le futur, est d’arriver à faire saisir effectivement la variété possible des points de vue, sans perdre l’obtention de la maîtrise complète d’au moins un point de vue. À ce défi de compétence mathématique, et contre la voie unique qui fut celle des « mathématiques modernes » des années 1960, est lié le fait qu’aujourd’hui l’enseignant de mathématiques, pour être « utile », doit être capable de dominer suffisamment bien au moins une autre discipline. Par exemple d’introduire en des termes relatifs à une autre discipline ce qui va faire l’objet d’une modélisation mathématique.

Ce sera mon troisième et dernier exemple, et je voudrais examiner simplement la façon dont les physiciens ont introduit le temps de demi-vie vers 1900, une notion qui n’avait pas été pensée auparavant en mathématiques pour l’exponentielle, fonction qui disposait pourtant d’une histoire sur deux siècles au moins. Je commence donc dans ce qui suit par suivre le langage et les méthodes de la physique expérimentale.

L’origine physique du temps de demi-vie

C’est Pierre Curie qui introduit le calcul, mais sans l’expression, dans un article de 1902, six ans après la découverte de la radioactivité.. J’insiste sur l’aspect de calcul, mais pour dire quelque chose qui va prendre un sens physique d’une réalité, celle de la radioactivité, et pouvoir se dire d’une façon purement abstraite par la fonction exponentielle. L’article des Comptes rendus de l’Académie des sciences de Paris, est intitulé sans aucune allusion mathématique : *Sur la constante de temps caractéristique de la disparition de la radioactivité induite par le radium dans une enceinte fermée*. Et, dès l’introduction, Pierre Curie résume l’essentiel :

> Une enceinte fermée renferme un sel solide ou une dissolution de sel de radium. Tous les corps placés dans l’enceinte deviennent radioactifs. Si l’on retire de l’enceinte un corps solide qui y a été activé, il perd à l’air libre son activité suivant une loi d’allure exponentielle, l’activité radiante diminuant de moitié pour des temps de l’ordre de grandeur d’une demi-heure.

La même année, Curie explique au *Bulletin de la Société française de physique* qu’il a avec cette demi-vie une « mesure absolue du temps» :

> Le temps ainsi défini est indépendant des unités adoptées pour les autres grandeurs physiques.

D'une manière très physique, reprenant le début de son explication sur la constante, Curie montre que la « loi de désactivation » est aussi celle de l'enceinte fermée elle-même, lorsqu'on a enlevé de l'intérieur du tube l'air modifié par le radium. Il insiste sur les conditions expérimentales.

> J'emploie le plus souvent, comme enceinte close, un tube de verre scellé à la lampe. Ce tube de verre est placé dans le cylindre intérieur d'un condensateur cylindrique en aluminium. Les rayons émis par le tube traversent l'aluminium et rendent conducteur l'air entre les armures du condensateur. On mesure le courant limite que l'on obtient entre les deux armatures, lorsqu'on maintient entre elles une différence de potentiel constante (450 volts). Le rayonnement, ainsi mesuré, est dû exclusivement à la radioactivité des parois, car, lorsqu'on retire rapidement l'air actif du tube, le rayonnement mesuré exactement après est le même qu'avant.

Une fois ces conditions expérimentales expliquées, Curie passe à l'écriture de la loi exponentielle dont il signalait d'abord l'allure. Tout change, et son écriture est bien sûr empruntée aux mathématiques, et il introduit plusieurs constantes.

> L'intensité du rayonnement I est exprimée en fonction du temps t par une loi exponentielle.
>
> $$\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\theta}},$$
>
> I étant l'intensité initiale, e la base des logarithmes népériens et θ une certaine constante qui représente le temps [noté t].

Curie envisage aussitôt les conditions de la mesure, permettant la vérification, « dans des conditions extrêmement variées » de la constante θ qui intervient dans la formule.

> En portant le logarithme de I en ordonnées et t en abscisse, les points représentatifs des expériences viennent se placer sur une droite, les écarts n'ayant pas de caractère systématique et ne dépassant pas l'erreur possible des expériences (1 pour 100 sur la valeur de I). [...] La valeur moyenne, qui résulte des déterminations concordantes obtenues dans 24 séries d'expériences, est : $\theta = 4,970 \times 10^5$ secondes (5,752 jours).

La moyenne porte sur les mesures de θ qui, du coup, va bientôt s'appeler *constante radioactive*. Pour une question de dimension, elle s'exprime en unités de temps, mais elle n'a pas une signification phénoménale dans le temps. D'ailleurs l'inverse de cette constante ($1/\theta$) va prendre le nom de *moyenne*, mais avec toutefois un tout autre sens, faisant appel à un autre modèle que nous esquisserons plus loin.

Pour le moment, Curie passe brusquement à une autre représentation de la constante, plus tard appelée le *temps de demi-vie*, sans qu'une explication vienne dire en quoi elle fait modèle parce que basée sur l'exponentielle. On l'appellera encore *période*, et là encore le *modèle* en jeu est autre. Curie ne donne toujours pas de nom, car il fait seulement un calcul, qui revient à obtenir θ ln 2.. Pourtant ce résultat exprime un phénomène pour lequel la mesure du temps correspond au concept de demi-vie.

> D'après cette valeur de θ, l'intensité du rayonnement baisse de moitié en 3 jours 23 heures 42 minutes, soit sensiblement en quatre jours.

Comme Curie travaille par enregistrement d'une intensité électrique sur du radium, le temps de demi-vie qui est de presque quatre jours, n'est pas ainsi calculé expérimentalement : c'est une expérience beaucoup plus courte dans le temps qui permet le calcul de θ, grâce à la loi exponentielle. Curie conclut sur une propriété dite caractéristique :

> Il résulte de ces nombreuses mesures que la constante de temps qui caractérise la diminution de l'activité d'une enceinte activée fermée n'est nullement influencée par les conditions de l'expérience, par la nature du gaz qui remplit l'enceinte ou de la matière qui en constitue les parois.

Ne nous trompons pas : il s'agit de θ, et la propriété caractéristique est seulement sa constance du point de vue expérimental, non la forme *a priori* de la loi exponentielle. Curie parie sur « l'allure exponentielle » et ne prétend nullement que la radioactivité fasse comprendre l'exponentielle. Il n'empêche, la radioactivité a bien fait naître le temps de demi-vie, et donc fait saisir une propriété non encore aperçue de l'exponentielle. Quelle est en effet la leçon mathématique que l'on peut tirer ?

1) La première leçon est de simple vérification, mais il faut néanmoins prendre des précautions si l'on veut vraiment faire œuvre utile.
On conviendra d'appeler la fonction $y(x) = \mathrm{Y}\ \mathrm{e}^{-kx}$ une *exponentielle de type k*, en supposant $k > 0$ et $\mathrm{Y} > 0$. Ai-je besoin de préciser que ces limitations sur les constantes tiennent à la décroissance de la radioactivité dont on utilise bien peu de propriétés physiques, et que c'est cela le début de la modélisation. L'équation différentielle correspondante est $y' + ky = 0$. Pour une telle fonction, on appelle *temps de demi-vie* la valeur x_{DV}, forcément unique compte tenu de la seule décroissance et de la continuité de l'*exponentielle de type k*, pour laquelle

$$\mathrm{Y}\,e^{-kx_{\mathrm{DV}}} = \frac{\mathrm{Y}}{2}.$$

Ce qui revient à écrire la relation

$$y(x_{\mathrm{DV}}) = \frac{y(0)}{2}.$$

La valeur de x_{DV} est exprimable à partir du logarithme népérien de 2 et du type k de l'exponentielle :

$$x_{\mathrm{DV}} = \frac{\ln 2}{k}.$$

Le temps de demi-vie concerne toutes les *exponentielles de type k*.
Mais on constate qu'avec la définition ci-dessus adoptée du temps de demi-vie, il n'y a aucune vérification physique facile par une expérience, et même pas l'indépendance pour ce temps de la valeur initiale. C'est que le repérage mathématique est trop prégnant. Il faut aller plus loin et expliquer que le temps de demi-vie, pour des *exponentielles de type k*, ne dépend pas de l'instant origine. Car il n'y a pas d'origine privilégiée des temps pour un physicien confronté à la radioactivité. Il faut donc enrichir le modèle du temps de demi-vie, et mieux l'analyser. En effet, ce n'est pas seulement pour la valeur origine de x ($x = 0$), mais

pour tout x, qu'est valable la relation fondatrice de demi-vie. Elle peut s'écrire par une relation fonctionnelle portant sur y, et notée (DV)). C'est cette relation mathématique qui donne son sens à la demi-vie :

$$y(x+x_{\mathrm{DV}})=\frac{y(x)}{2}. \qquad \text{(DV)}$$

Une figure peut aisément être associée, pour montrer alors la constance de x_{DV}, mais on reconnaîtra que cette figure relève des mathématiques, et non du domaine expérimental pour des temps de vie aussi longs. Il entre dans ce cadre avec des éléments radioactifs à période bien plus petite

2) La deuxième leçon consiste à analyser ce qui a été effectivement réalisé, à partir même de l'œuvre de Curie. En un mot, a-t-il été démontré que la constance expérimentalement constatée du temps de demi-vie, exprimée par la dernière relation fonctionnelle envisagée, correspondait à la nécessité d'un comportement exponentiel ?
La démonstration de la relation (DV) utilise une propriété structurale de la *fonction exponentielle de type k*, exprimée par une relation qui doit faire jouer la propriété

$$a^{x+y} = a^x\, a^y,$$

sans doute le plus vieux *modèle* pour les exponentielles qui correspond à la forme fonctionnelle

$$f(x+t) = f(x)\, f(t)$$

et pouvait se lire déjà dans les *Éléments* d'Euclide pour les progressions géométriques au III^e^ siècle avant notre ère, comme nous aurions pu nous en apercevoir dès le premier exemple ici choisi, du moins si l'on avait fait le calcul à la mode euclidienne de la somme finie d'une progression géométrique. Il faut quand même faire jouer la constante multiplicative, et on peut penser avantageux de mettre l'équation sous la forme : :

$$f(0)\, f(x+t) = f(x)\, f(t).$$

Elle se vérifie avec une *exponentielle de type k* selon

$$\mathrm{Y} \cdot \mathrm{Y}\, \mathrm{e}^{-k(x+t)} = \mathrm{Y}\, \mathrm{e}^{-kx} \cdot \mathrm{Y}\, \mathrm{e}^{-kt},$$

et se réduit à

$$\mathrm{e}^{-k(x+t)} = \mathrm{e}^{-kx}\, \mathrm{e}^{-kt}.$$

Mais ce qu'il faudrait démontrer à la suite de la question posée, est d'une autre nature, et c'est une réciproque qui est en jeu. À savoir que seule l'exponentielle de type k possède la propriété (DV). Or ce résultat est mathématiquement faux. Je suppose que tout le monde le pressent, mais en fait il est possible d'obtenir un résultat caractéristique. À condition de généraliser la notion de temps de demi-vie sous la forme d'un temps de α-vie, α étant un nombre quelconque entre 0 et 1. Il n'y a aucune raison en effet que la division par deux suffise. On dira qu'une fonction a un temps de α-vie si pour tout x (par exemple positif ou nul) :

$$f(x + x_{\alpha\mathrm{V}}) = \alpha\, f(x) \qquad (\alpha\mathrm{V})$$

Une fonction, supposée en outre continue, qui possède un temps de α-vie pour suffisamment de α, voire pour tous les α, est nécessairement une exponentielle. On peut alors conclure comme Curie à la nécessité du comportement exponentiel de la radioactivité[13]. Je n'ai pas détaillé les calculs, mais on se doute que ce ne soit pas tout à fait élémentaire au niveau du lycée en tout cas, ne serait-ce que parce que j'ai mentionné, certes très vite, la continuité requise pour la fonction. La mathématique, lorsqu'elle prend en charge l'explication d'une constatation expérimentale et cherche à établir une loi, n'a pas la garantie d'être simple. Par contre, la loi mathématique, ici l'exponentielle, peut simplement et efficacement résumer ce qui est perçu par le physicien. Curie a effectivement eu raison de parler d'allure exponentielle.

3) La modélisation de la demi-vie présuppose connue l'exponentielle. La suppose aussi bien l'expérience, toujours avec la radioactivité qui, par comptage dans le temps, produit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}(x)+ky(x)=0.$$

Cet autre modèle intervient effectivement dans une théorie de la radioactivité proposée, en 1902 également, par Ernest Rutherford et Frederic Soddy. Ce sera exposé par Soddy dans un livre, *The Interpretation of Radium*, et ce titre même nous rappelle que Curie ne faisait aucune interprétation, en particulier sur l'atome, se contenant de mesures expérimentales, à l'exception toutefois de la loi de décroissance exponentielle. Soddy ne va utiliser aucun appareillage mathématique, et même, dit-il, désire « éviter tout raisonnement mathématique ». Ainsi il attribue aux seuls mathématiciens la possession de l'exponentielle (et il en réfère même à un collègue mathématicien qui lui a suggéré la vie moyenne), pour se contenter d'énoncer les conséquences.

> Dans tous les cas simples de désintégration atomique, la vitesse de transformation est proportionnelle à la masse de la substance qui se transforme. La notation usuelle désigne par la lettre λ la *fraction* de la masse totale actuelle qui se transforme par seconde ; et on appelle ce symbole λ du nom spécial de « constante radioactive ». […] Le point important est que, dans chaque cas, c'est une constante réelle de la nature, indépendante de l'histoire passée, comme de l'avenir de la substance en question, de la quantité actuelle, grande ou petite, de celle-ci, ainsi que de toute autre considération, quelle qu'elle soit. […] Faisant le pas suivant en sautant par-dessus les mathématiques, on trouve que la durée moyenne de vie de l'atome d'une substance radioactive, c'est-à-dire la période de temps, exprimée en secondes, durant laquelle il existe, en moyenne, avant que son tour arrive de se désintégrer, est simplement la réciproque de la constante radioactive, soit $1/\lambda$.

Ce très beau texte se poursuit par une explication de ce qui pourrait paraître un paradoxe : la vie moyenne (l'inverse de la constante θ de Curie) ne dépend pas du temps, et ne diminue pas avec le temps. À nos yeux du moins, ce texte pèche par omission : il n'est pas expliqué que cette constance de la vie moyenne (qui revient au temps de demi-vie à un facteur multiplicatif près en ln 2, et peut donc avoir une signification expérimentale, 481 250 secondes dit Soddy, ce qui correspond aux 497 000 secondes calculables pour Curie) est une conséquence inéluctable de la loi de décroissance exponentielle. Pour le dire autrement, le modèle est celui de la proportionnalité de la vitesse de transformation à la masse en transformation, mais envisagée de façon discrète (toutes les secondes). La modélisation en fait une relation

(13) Voir Jean Dhombres, *Penser historiquement la réalité mathématique*, à paraître.

continue : si $n(t)$ est le nombre d'atomes de substance radioactive au temps t, on a :

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\lambda n(t).$$

À vrai dire, Soddy a en tête un autre modèle. Il est probabiliste, et il l'exprime d'abord en parlant d'un « hasard » de la désintégration. Mais il l'explique et nous pourrions avancer que sa modélisation devient celle d'un calcul des probabilités. C'est un autre modèle possible pour l'exponentielle[(14)]. Il faut dans le texte ci-dessous, admirer la formulation scientifique dans un langage ordinaire, mais aussi penser ce qu'elle cache.

> Si, parmi tous les humains qui sont au monde, l'ange de la mort choisissait ceux qui doivent mourir chaque minute en proportion fixe et indépendante de leur âge, qu'ils soient jeunes ou vieux ; s'il ne regardait qu'au nombre des victimes, frappant absolument au hasard, une ici et une là, de manière à constituer le nombre requis, notre probabilité de vie deviendrait dans ces conditions, la même que celle des atomes radioactifs.

Jean Becquerel, qui est avec les Curie le découvreur de la radioactivité en 1896, la décrit plus tard directement avec l'exponentielle, en 1924, dans son livre : *La radioactivité et les transformations des éléments*. Il pose $n(t)$, nombre d'atomes transformés à l'instant t, comme égal à $n_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Le nombre $\mathrm{N}(t)$ d'atomes non transformés à l'instant t, est alors l'intégrale de $n(t)$ entre t et l'infini, et en particulier $\frac{d\,\mathrm{N}(t)}{dt} = n(t)$: le *modèle* de la désintégration concernant tous les atomes de la substance radioactive. On calcule dès lors au temps 0 :

$$\mathrm{N}(0) = \int_0^\infty n(t)dt = n_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt = \frac{n_0}{\lambda},$$

et au temps t :

$$\mathrm{N}(t) = \int_t^\infty n(u)du = \frac{n(t)}{\lambda}.$$

De sorte que

$$\frac{d\,\mathrm{N}(t)}{dt} + \lambda\,\mathrm{N}(t) = 0.$$

Cette conséquence n'est pas un modèle puisqu'elle se déduit mathématiquement. Il est trop évident de dire que Becquerel présuppose connue la fonction exponentielle, qui reste le modèle, avec juste des propriétés intégrales en place de propriétés de dérivation. La présentation du modèle de Soddy paraît plus riche. Mais elle fait intervenir le « hasard », en un sens commun, et non le hasard tel qu'il résulte des probabilités et des statistiques. C'est sans doute là qu'il y a le plus à travailler pour une présentation élémentaire. Mais, dans tous les cas, on constate bien que l'enseignant de mathématiques devra faire dans son enseignement même un saut en dehors des mathématiques pour être utile. C'est la morale que je tire du dernier exemple présenté.

(14) Voir André Warufsel, Un mathématicien, un physicien et un probabiliste aux prises avec la radioactivité, *Bull. APMEP*, décembre 2004, p. 881-892.

Conclusion

Je ne m'étais évidemment pas assigné la tâche impossible de dire le futur de l'enseignement des mathématiques, mais j'ai voulu, comme très souvent le font les mathématiciens, prendre concrètement quelques exemples du passé, sans trop de technique toutefois, pour établir qu'en dépit de la variabilité de la notion d'utilité, le mathématicien doit toujours justifier son rôle dans le cadre de l'école. C'est-à-dire entrer en confrontation avec d'autres savoirs pour faire comprendre par l'exemple ce qu'apporte son fonctionnement propre, et même entrer en confrontation avec le sens commun. La confrontation n'a rien de polémique, mais elle engage le professeur à ne plus se reposer sur une représentation sociale des mathématiques qui n'existe plus, et qui est même battue en brèche. N'entend-on pas dire partout qu'en ne s'occupant que de ce qui est quantifiable, par exemple en économie, et selon le mouvement de la fin du XVII^{e} siècle, les mathématiques cachent sous la technique des idéologies qui transforment tout en marchandise ? Cette confrontation ne porte pas sur l'efficacité des mathématiques, dont on peut dire quelle est désormais reconnue dans la représentation générale en Europe au XX^{e} siècle, alors que bien peu était reconnu deux siècles plus tôt, au moment même où se constituait les corps des enseignants de mathématiques.

C'est sur la possibilité même des mathématiques à permettre une critique de la pensée que porte la crise de représentation des mathématiques. On ne le voit que trop lorsque l'on discute des sondages politiques, où l'on oppose les nécessaires aménagements et corrections du calcul à la scientificité du dépouillement des questionnaires. Il ne s'agit pas de renier la statistique comme science mathématique : il s'agit de montrer que ces recettes même de calcul permettent de discuter la validité des conclusions. Mais l'exemple des statistiques est là pour prouver combien l'ignorance de l'objet précis sur lequel porte une statistique peut entraîner comme méprise.

L'exemple de la radioactivité nous a enseigné alors qu'un physicien pouvait faire découvrir des propriétés d'un objet mathématique connu depuis longtemps comme l'exponentielle, et lui faire posséder une « période ». Bien sûr, cette propriété peut se déduire par les seules mathématiques. N'est-ce pas pourtant le monde phénoménal qui aide à en comprendre l'utilité d'une telle propriété, et ainsi justifie aussi bien le calcul que le raisonnement mathématique sur l'exponentielle que l'on apprend dans les classes.

Le défi majeur pour le futur, est bien pour l'enseignant des mathématiques, de devoir s'intéresser de près à autre chose que les mathématiques, et ce pour la qualité même de son enseignement.