

Exemples de séries

1. Géométrie

a. Si $a \neq 1$, $\sum_{j=0}^n a^j = \dots$

b. Si $|a| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \dots$

c. En désignant par $\sum_{j=0}^{+\infty} u_j$ la limite de la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{j=0}^n u_j$ sous réserve que cette suite (S_n) converge

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \dots$$

2. La disparition ⁽¹⁾

On note E l'ensemble des entiers strictement positifs dont l'écriture décimale ne fait pas intervenir le chiffre 9 et pour chaque entier $k \geq 1$, E_k la tranche des éléments de E dont l'écriture décimale comporte exactement k chiffres.

a. Le nombre N_k d'éléments dans E_k est \dots

Indication : on n'écrit bien sûr pas de zéro inutile en tête.

b. le plus petit élément de E_k est \dots

c. donc $\sum_{j \in E_k} \frac{1}{j} \leq 8 \left(\frac{9}{10} \right)^{k-1}$

d. et ainsi $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{j \in E, j \leq N} \frac{1}{j} \leq 80$ car \dots

e. La suite des sommes partielles $\sum_{j \in E, j \leq N} \frac{1}{j}$ converge car \dots .

$$\text{Finalement : } \sum_{j \in E} \frac{1}{j} \leq 80$$

f. Qu'est-ce que ça change de remplacer 9 par un autre chiffre ? Et la base 10 par une autre base ?

3. La déraisonnable efficacité des mathématiques

L'article a rappelé que l'ensemble des nombres premiers est infini et a montré que la suite des sommes partielles des inverses de ces nombres tend vers l'infini.

Sur le modèle de la disparition précédente, conservons seulement les nombres premiers *jumeaux*, c'est à dire les nombres $p, p+2$ tels que p et $p+2$ sont premiers : 3 et 5 sont jumeaux, 5 et 7, 11 et 13 etc... Il est vraisemblable qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux, mais c'est seulement une *conjecture*.

En 1919, le mathématicien norvégien Viggo Brun a démontré que, même si cette conjecture est vraie, la série des inverses des nombres premiers jumeaux converge. La somme a été calculée et recalculée avec une grande précision depuis 1974, ce qui a permis de déceler un *bug* dans le coprocesseur *Pentium 95* : vous pouvez lire à ce sujet https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_de_Brun. Qui sait combien de catastrophes (pas seulement numériques) ont été ainsi évitées ?

4. En guise de conclusion

Le titre précédent est emprunté à Eugène Wigner (1902-1995), prix Nobel de physique qui fut l'élève de Lászlo Rátz : Gérald Tenenbaum en parle dans sa conférence. Nous voici revenus à la patrie de Paul Erdős.

¹En référence à Georges Perec, consulter [https://fr.wikipedia.org/wiki/La_Disparition_\(roman\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/La_Disparition_(roman))