

Euler, ou l'art de chercher, découvrir, inventer

Jean-Pierre Friedelmeyer

Euler est né il y a 300 ans, le 15 avril 1707, et il inspire toujours les travaux des mathématiciens, ou, plus modestement, il peut encore réjouir professeurs et historiens à la lecture de son immense œuvre. Je voudrais célébrer à ma manière cet anniversaire en choisissant l'un ou l'autre article représentatif qui puisse nous intéresser encore aujourd'hui. Mais comment choisir dans cette œuvre immense ? Les inventions, les théorèmes, les formules, les méthodes qui portent son nom sont tellement nombreux, touchant à tous les domaines des mathématiques (sans compter la physique, la mécanique, l'astronomie, etc.) qu'on ne saurait en sélectionner des exemples sans se sentir aussitôt frustré de ne pouvoir en présenter d'autres, aussi remarquables et fascinants. **J'ai donc choisi en toute subjectivité de vous présenter trois seulement des joyaux qui constituent ce trésor incomparable**, en me basant principalement sur le fait qu'ils illustrent des thèmes qui restent formateurs pour nos élèves ou étudiants et en tâchant de ne pas dépasser le niveau d'un étudiant des premières années d'Université tout en abordant une grande variété de domaines différents. À chaque fois j'ai voulu entrer dans le cœur du sujet traité par Euler et ne pas me contenter de généralités ou d'allusions. Bien des résultats peuvent nous donner des idées d'exercices ou de problèmes pour nos classes, tant ces écrits restent stimulants encore aujourd'hui, pour le professeur comme pour le chercheur. Pour les références des œuvres d'Euler, j'ai utilisé la classification des Œuvres complètes, sous la forme E.O., suivi du numéro de volume, tous de la première série, puis des pages et la date de présentation. L'édition de ces œuvres complètes ne comporte pas moins de 80 gros volumes répartis en trois séries, plus la correspondance et deux tomes d'œuvres posthumes. La vie d'Euler est partagée nettement en trois périodes : de 1717 à 1741 à l'Académie de Saint-Petersbourg, de 1741 à 1766 à l'Académie de Berlin, puis à nouveau, de 1766 à 1783 à Saint-Petersbourg, trois périodes auxquelles correspondent pour chacune un des textes ci-dessous.

Le premier texte est centré sur le calcul des séries, en plein essor au moment où Euler entre en scène, mais auquel notre mathématicien donnera une ampleur et une puissance inégalées. C'est le fameux problème de Bâle concernant la série des inverses des carrés des entiers positifs et sur lequel il travaillera durant plusieurs de ses années de jeunesse, c'est-à-dire durant toute la première période à Saint-Petersbourg. C'est l'histoire d'une véritable lutte entre ce qui apparaît au départ comme une énigme insurmontable et la mise en place des jalons qui vont peu à peu aboutir à sa résolution, semant tout au long de ce trajet des théorèmes et des méthodes qui serviront bien au-delà du seul problème de Bâle ; une histoire qui permettra de suivre son style de travail, revenant sans cesse sur le même sujet mais

(*) jean-pierre.friedelmeyer@wanadoo.fr

chaque fois avec des idées nouvelles, idées et résultats qui constitueront à la longue tous ces théorèmes et méthodes qui portent son nom.

Le deuxième texte concerne un travail de recherche qu'Euler a présenté à l'Académie de Saint-Petersbourg en 1778 donc durant la dernière période de sa vie. Il y étudie un problème d'arithmétique à support géométrique : trouver les triangles à côtés rationnels dont les trois médianes sont aussi rationnelles⁽¹⁾. On est frappé par l'ingéniosité d'Euler dans le choix d'inconnues et de paramètres divers pour arriver à ses fins. Ce qui est agréable c'est qu'il ne nous fournit jamais un texte abrupt et sec. Il nous fait part de ses émerveillements mais aussi de ses tentatives avortées, de ses errements, voire de ses échecs, de sorte que la lecture de ses textes est très instructive quant à l'heuristique mathématique. Souvent, telle remarque faite en passant suscite chez le lecteur d'autres réflexions ou recherches. C'est le cas de cet article qui a donné l'occasion chez de nombreux géomètres ultérieurs d'une étude des triangles automédians, triangles qui jouissent de nombreuses propriétés que l'on peut étudier pour la plupart en classe.

Le troisième texte se situe dans la période berlinoise et étudie l'une des nombreuses équations dites d'Euler, celle qui est associée à ce que l'on appelle le théorème d'addition des intégrales elliptiques. L'évocation des intégrales elliptiques, thème qui ouvre à l'une des plus puissantes et riches théories mathématiques du XIX^e siècle, ne doit pas effrayer le lecteur. Au contraire, le texte d'Euler peut nous aider à comprendre quelques unes des idées novatrices des mathématiques plus récentes et nous faire voir combien les domaines très séparés avant Euler de l'analyse, de l'algèbre, de la géométrie, se voient unifiés en une synthèse grandiose dont il est parfaitement conscient :

« *On peut voir par là combien étroit et merveilleux est le lien qui unit l'analyse infinitésimale, non seulement avec l'algèbre ordinaire, mais même avec la théorie des nombres, qui pourtant semble répugner à ce genre de traitement*⁽²⁾ ».

Mais comme ce texte traite de questions moins familières aux professeurs du secondaire, nous le renvoyons sur le site de l'APMEP pour ceux qui s'y intéressent.

I. Le problème de Bâle

Posé par Jacques Bernoulli dans son « *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis* » publié à Bâle en 1689, le problème de Bâle avait déjà fait l'objet d'une question de Pierre Mengoli dans son *Novae quadraturae Arithmeticae* de 1650 : calculer la somme des inverses des carrés des entiers naturels, soit

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.},$$

somme que nous noterons S dans la suite. On connaît le succès qu'avait rencontré Leibniz pour sa sommation de la série (découverte en 1674, publiée en 1682) :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} = \frac{\pi}{4}$$

(1) *Investigatio trianguli in quo distanciae angulorum ab eius centro gravitatis rationaliter exprimantur*, E. O. II, p. 290 à 302 (1778).

(2) E.O., II p. 376.

et qu'il considérait comme une véritable quadrature arithmétique du cercle⁽³⁾. Calculer la valeur exacte de S représentait de même un défi dont la solution laissait espérer une découverte aussi importante et excitante que celle de Leibniz. Du fait de sa convergence lente (il faut déjà un peu plus de 200 termes (exactement 203) pour arriver jusqu'à la seconde décimale exacte, c'est à dire 1,64) on pouvait difficilement espérer identifier un nombre connu dans ses valeurs approchées, à moins de trouver un moyen pour accélérer un tel calcul. Le calcul de S sert alors d'exemple pour illustrer des méthodes générales de calcul des séries comme le fait Stirling dans son *Traité sur la sommation et l'Interpolation des Séries Infinies*⁽⁴⁾ publié en 1730 et qui calcule la valeur approchée $S \approx 1,644\ 934\ 065$.

À ce moment-là Euler est à Saint-Petersbourg depuis trois ans déjà, appelé à l'Académie nouvellement créée par Catherine I de Russie. Il y avait été recommandé par Daniel I Bernoulli avec qui il avait noué une profonde amitié alors qu'ils étudiaient ensemble les mathématiques à l'université de Bâle, mathématiques enseignées par le père même de Daniel, Jean I Bernoulli. En 1725 Daniel ainsi que son frère Nicolas II avaient obtenu un poste intéressant et bien rémunéré à l'Académie de Saint-Petersbourg, qu'ils acceptèrent malgré la difficulté d'un voyage et d'un dépaysement dont on n'a plus idée aujourd'hui, mais qui est ainsi décrite par le père Jean I :

C'est assurément une entreprise hardie pour des jeunes gens, surtout dans une saison aussi avancée et désagréable par les pluies continuelles tombées depuis près de six mois. Toujours vaut-il mieux souffrir un peu de la rigueur du ciel dans un pays de glace où les Muses sont les bienvenues que de mourir de faim dans un pays tempéré où on les maltraite et les méprise...

Les deux frères réussissent à convaincre le Président de l'Académie, Blumentrost, d'inviter également Euler, a priori pour occuper un poste dans la classe de médecine. Euler se décide à quitter la Suisse, son pays natal, pour la Russie en avril 1727. Il n'y reviendra plus jamais. Très vite il sait s'imposer à l'Académie par son caractère amène, son exceptionnelle mémoire pour apprendre les langues, dont le russe, et bien sûr son extraordinaire génie scientifique. Il n'est plus question de médecine, et l'Académie lui confie le poste devenu vacant de professeur de physique, poste qu'il occupera jusqu'en 1733. Cette année-là Daniel Bernoulli cède son poste de professeur de mathématiques à son ami et collègue Euler, pour retourner à Bâle.

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, Euler ne puise pas ses méthodes, ni même son intérêt pour le problème de Bâle dans le *Traité* de Jacques Bernoulli mentionné ci-dessus. En effet, Jean I Bernoulli, le maître qui enseigna les mathématiques au jeune Euler à l'université de Bâle, s'était irrémédiablement fâché avec son frère aîné Jacques, au point de faire obstruction à la diffusion de ses œuvres qu'Euler n'aura pas l'occasion d'étudier à son arrivée à Saint-Petersbourg. De sorte qu'il se construit ses propres méthodes pour affronter les multiples problèmes de

(3) Leibniz, *Expression en nombres rationnels, de la proportion exacte entre un cercle et son carré circonscrit*, traduit par Marc Parmentier, in *Leibniz, la naissance du calcul différentiel, 26 articles des Acta Eruditorum*, Vrin 1989, p. 61.

(4) Pour la présentation de sa méthode voir par exemple *Histoires d'algorithmes*, Belin, 1994, p. 481.

calculs de séries qui avaient pris une grande place dans la communauté mathématique, comme en témoignent de nombreux traités sur les séries de l'époque⁽⁵⁾. Parmi ceux-ci, signalons le *De transformatione serierum* (1727) de Goldbach qui se trouvait à l'Académie depuis 1725, et avec lequel Euler se lie d'une profonde amitié. Un échange de lettres entre Daniel Bernoulli et Goldbach⁽⁶⁾ est à cet égard instructif quant aux méthodes d'encadrement utilisées.

À partir de l'égalité : $\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{n-1}{n^2} - \frac{n}{(n+1)^2}$, Daniel Bernoulli déduit

l'égalité (en écriture moderne) : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$. De sorte que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > 1 + \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 4} = \frac{29}{18} > \frac{8}{5}.$$

Goldbach de son côté part de la double inégalité :

$$\frac{1}{n^2 + \frac{17}{8}n + \frac{225}{256}} < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2 + 2n + \frac{3}{4}}$$

équivalente à

$$\frac{256}{(16n+9)(16n+25)} < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{4}{(2n+1)(2n+3)}$$

ou encore

$$\frac{16}{16n+9} - \frac{16}{16n+25} < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n+3}$$

de sorte que le reste d'ordre N, $R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, est encadré par

$$\frac{16}{16N+9} < R_N < \frac{2}{2N+1}$$

Avec N = 11, il arrive ainsi rapidement à l'encadrement : 1,644 518 < S < 1,644 988.

À cette époque, ces correspondances ne sont pas privées mais ont un caractère officiel et sont connues du cercle étroit mais amical des membres de l'Académie.

Euler est donc parfaitement au courant de ces calculs et ces méthodes. Il devait rapidement leur donner une ampleur et un développement inouï.

Pour nous limiter au problème de Bâle, Leibniz avait déjà signalé, dans une lettre à Jean Bernoulli de 1696 les égalités (en écriture moderne) :

(5) voir par exemple le chap. 20 *Infinite series* dans *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, M. Kline, 1972, p. 436 - 467.

(6) Voir J. E. Hofmann, *Um Eulers erste Reihenstudien*, in *Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Euler*, Berlin 1959, p. 140 à 205.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_1^0 \ln(1-x) \frac{dx}{x}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \int_0^1 \ln(1+x) \frac{dx}{x}$$

obtenues en remplaçant $\ln(1-x)$ par $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$ et en intégrant terme à terme et de façon analogue pour $\ln(1+x)$.

Euler procède beaucoup plus généralement pour obtenir diverses relations entre des séries et des intégrales dépendant de paramètres⁽⁷⁾, relations qu'il applique à la fin en prenant des valeurs particulières de ces paramètres. Le calcul final revient à

expliciter l'intégrale $-\int_0^y \frac{du}{u} \cdot \ln(1-u)$; premièrement en $\sum_1^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$; ensuite il

décompose \int_0^y en $\int_0^1 - \int_y^1$ puis, par le changement $u = 1-v$:

$$\int_y^1 \frac{du}{u} \cdot \ln(1-u) = \int_0^z \frac{dv}{1-v} \cdot \ln v = \ln z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

avec $z = 1-y$. D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2} = S - \ln z \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

ou bien

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n + z^n}{n^2} + \ln z \cdot \ln y$$

Finalement, en prenant $y = z = 1/2$, on a : $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} n^2} + (\ln 2)^2$ ce qui lui permet de calculer une valeur approchée de S à 10^{-6} près, soit $S \approx 1,644\ 934$.

Dans un mémoire ultérieur⁽⁸⁾, Euler généralise l'utilisation du calcul intégral pour l'approximation des séries par l'encadrement des fonctions au moyen de fonctions en escalier (sans utiliser le mot). Il introduit l'idée devenue familière que le terme général a_k d'une série peut être associé à une fonction que nous noterons $a_k(x)$, qui prend la valeur a_k au point d'abscisse k . Euler lui-même parle simplement d'ordonnées égales aux termes de la série mais fait une représentation graphique.

(7) Euler, *De summatione innumerabilium progressionum*, E.O. XIV, p. 25 à 41(1730/1731).

(8) Euler, *Methodus universalis serium convergentium summas quam proxime inveniendi*, E.O. XIV, p. 101 - 107 (1736).

3. Sit series, cuius summa investigatur,

$$a + b + c + d + e + \text{etc.},$$

in qua terminus, cuius index est n , sit x , quantitas scilicet ex n utrumque composita. Sumantur (Fig. 1) in axe AP partes AB, BC, CD, DE etc.

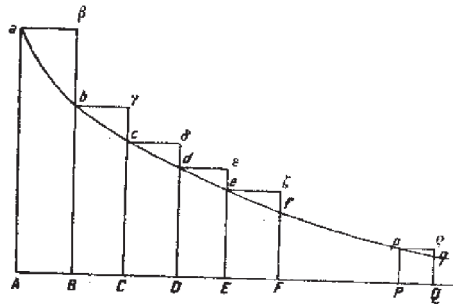


Fig. 1.

inter se aequales et unitate denotentur. In punctis A, B, C, D etc. erigantur applicatae Aa, Bb, Cc, Dd etc. respectue aequales terminis seriei propositae a, b, c, d etc. Atque sumta $AP = n - 1$ fiat applicata $Pp = x$. Ad

Il en déduit la double inégalité suivante, par comparaison avec des fonctions en escalier et des aires de trapèzes :

$$\int_0^n a_{k+1}(x)dx + \frac{a_1 - a_{n+1}}{2} < \sum_{k=1}^{k=n} a_k < \int_1^{n+1} a_k(x)dx + \frac{a_1 - a_{n+1}}{2}$$

qu'il améliore, par la considération des tangentes, en approximations sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_k \approx \int_0^n a_{k+1}(x)dx + \frac{a_1 - a_{n+1}}{2} + \frac{a_1 - a_2}{12} - \frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{12},$$

et par passage à la limite :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \approx \int_0^{+\infty} a_{k+1}(x)dx + \frac{7a_1 - a_2}{12}.$$

Suivent deux illustrations par des applications numériques, l'une pour le calcul des 10^6 premiers termes de la série harmonique, l'autre pour l'approximation de la somme S .

Dans le premier cas, il commence par calculer explicitement la somme des 10 premiers termes, et obtient 2,928 968. Puis il applique sa formule d'approximation

en posant $a_k(x) = \frac{1}{10+x}$ qui lui donne $\int_0^n \frac{dx}{11+x} = \ln \frac{n+11}{11}$, soit, pour

$n = 999\,990$, une valeur totale de 14,392 669 (erreur de 3 unités dans la dernière décimale).

Pour le second exemple, il procède de même en calculant la somme des 10 premiers termes pour lesquels il trouve 1,549 768, en posant $a_k(x) = \frac{1}{(10+x)^2}$ et il obtient une valeur approchée de S égale à 1,644 920 (soit trop petit de 14 unités sur les deux dernières décimales).

L'aboutissement des recherches d'Euler sur le problème de Bâle, c'est-à-dire la détermination exacte de S et plus généralement de $S_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ va représenter une magnifique synthèse des idées et des méthodes explorées et affinées durant les premières années de son séjour à Saint-Petersbourg et va donner lieu à l'une des plus belles de ses découvertes⁽⁹⁾. Le ressort déterminant consiste à généraliser aux séries entières les relations existant entre les racines et les coefficients d'un polynôme. Rappelons celles-ci :

Soit P un polynôme de degré n, à coefficients complexes, admettant n racines réelles ou complexes, comptées avec leur ordre de multiplicité : $\{x_i ; 1 \leq i \leq n\}$:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = a_n \prod_{1 \leq i \leq n} (x - x_i).$$

On a :

$$\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \beta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i \cdot x_j = +\frac{a_{n-2}}{a_n}; \gamma = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i \cdot x_j \cdot x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}; \text{ etc.}$$

avec comme dernière relation : $\prod_{1 \leq i \leq n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

On démontre alors les formules classiques sur la somme des puissances des racines :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i = \alpha; \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2 = \alpha^2 - 2\beta; \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 = \alpha^3 - 3\alpha\beta - 3\gamma; \text{ etc.}$$

Dans le cas particulier où $a_0 = 1$, on a alors les relations (1) qui vont être systématiquement utilisées par Euler :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{x_i} = -a_1; \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{x_i^2} = a_1^2 - 2a_2; \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{x_i^3} = -a_1^3 + 3a_1a_2; \text{ etc.} \tag{1}$$

En 1735, Euler n'avait pas encore écrit son *Introduction à l'analyse infinitésimale*, (qui date de 1748), mais il connaissait la formule de Taylor établie par Brook Taylor en 1715 et les développements en série entière des fonctions usuelles qu'elle

permettait, en particulier celle de $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$

(9) Euler, *De summis serierum reciprocarum*, E.O XIV, p. 73 à 86. (1734/1735).

Euler pose $\sin x = y$ et va appliquer les formules rappelées ci-dessus à l'équation

$$0 = 1 - \frac{x}{y} + \frac{x^3}{3!y} - \frac{x^5}{5!y} + \text{etc.}$$

dont il pose les racines A, B, C, D, etc., pour un arc x donné, en remarquant d'emblée que ces racines s'écrivent, si A est le plus petit arc dont le sinus vaut y , outre A lui-même :

$$\begin{array}{cccccc} A & 2+A & 3-A & 4+A & 5-A & \\ -A & 2+A & -3-A & 4+A & -5-A & \text{etc.} \end{array}$$

Il suffit maintenant d'appliquer les relations rappelées ci-dessus pour diverses valeurs de y , à commencer par $y = 1$, donc $A = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, les racines sont

toutes doubles et leurs inverses s'écrivent : $+\frac{2}{\pi}; -\frac{2}{3\pi}; +\frac{2}{5\pi}; -\frac{2}{7\pi}; +\frac{2}{9\pi}; \text{etc.}$

En appliquant (1), Euler retrouve ainsi déjà la formule de Leibniz :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} = \frac{\pi}{4}$$

mais aussi, immédiatement :

$$\frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.} \right) = 1 - 2 \times 0 = 1,$$

soit :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Or si dans la somme $S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \text{etc.}$, on regroupe d'une part les termes de rang pair dans lesquels on mettra $1/4$ en facteur, d'autre part ceux

de rang impair, on met en évidence l'égalité $S = S_1 + \frac{1}{4}S$. Donc $S = \frac{4}{3}S_1 = \frac{\pi^2}{6}$.

Dans la foulée et avec une visible jubilation, Euler donne alors les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \text{puis} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{par le même}$$

regroupement utilisé pour S . Enfin :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536} ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Et les mêmes sommes pour les puissances 7 et 8.

Mais une fois qu'Euler est lancé, vous ne l'arrêtez plus très facilement. La méthode mise en place ci-dessus pour $y = 1$ s'applique évidemment pour toutes autres valeurs

de y , par exemple $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui lui fournit

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

et des résultats semblables avec $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le cas $y = 0$ est traité à part, avec l'équation

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{etc.} = 0$$

ou

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \text{etc.} = 0$$

dont les racines sont les nombres $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Donc $\frac{\sin x}{x}$ se factorise en :

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \text{etc.}$$

ce qui lui fournit cette fois-ci directement les sommes des puissances paires, qu'il calculera effectivement jusqu'à la puissance 12.

L'article se termine avec des représentations de π au moyen de quotients de séries rapidement convergentes, telles que :

$$\pi = \frac{25}{8} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}$$

Euler n'en restera pas là et fera plusieurs autres découvertes concernant ces séries, particulièrement leur lien avec les nombres de Bernoulli ou avec la distribution des nombres premiers. Nous lui laissons la parole pour commenter cet admirable ensemble de découvertes :

La méthode que j'ai donnée dans les Commentaires de l'Académie de Saint-Petersbourg pour trouver la somme de cette suite, lorsque l'exposant n est un nombre pair

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

a quelque chose d'extraordinaire, parce qu'elle est tirée d'un principe dont on n'a pas encore fait beaucoup usage dans les recherches de cette nature. Elle est cependant aussi sûre et aussi fondée que toute autre méthode dont on se sert ordinairement dans la sommation des suites infinies : ce que j'ai fait voir aussi par

le parfait accord de quelques cas déjà connus d'ailleurs et par les approximations, qui nous fournissent une manière aisée d'examiner la vérité dans la pratique. Mais il me semble aussi que cette méthode ait un très grand avantage, en ce qu'elle conduit en même tems à la connoissance d'une infinité d'autres suites dont les sommes ont été inconnues jusqu'à présent ; pendant que les méthodes ordinaires ne nous découvrent presque rien en ce genre de suites. Plusieurs Géomètres ont honoré cette découverte de leur attention en cherchant une démonstration du cas $n = 2$, auquel j'avois trouvé que la somme de cette suite

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

égaloit la sixième partie du carré de la circonférence d'un cercle dont le diamètre est = 1. Le cas leur sembloit d'abord d'autant plus remarquable que Feu Mr. Jacques Bernoulli, après l'avoir cherché long tems en vain, l'avoit jugé d'une très grande conséquence pour perfectionner la Théorie des séries infinies⁽¹⁰⁾.

Toutes ces années de recherche et de découvertes se condenseront dans la publication, en 1748 dans l'*Introductio in analysin infinitorum*, ouvrage majeur de l'histoire de l'analyse où l'on retrouvera, développées et organisées en chapitres toutes les idées et bien d'autres présentées à partir de ce problème de Bâle. Celui-ci a beaucoup occupé Euler dans ses premières années, mais ne l'a pas empêché de s'intéresser à d'autres problèmes issus de l'algèbre, de la géométrie, de l'arithmétique pour laquelle il avait une prédilection peu courante à l'époque.

II. Recherche des triangles dans lesquels les distances des sommets au centre de gravité s'expriment rationnellement.

Nous ne pouvons mieux résumer cet article que ne le fait Euler lui-même dans une présentation en français, alors que le texte lui-même est en latin.

SUMMARIUM

Ce Mémoire qui fera plaisir au petit nombre d'Amateurs de l'Analyse indéterminée contient une très belle solution du problème énoncé dans le titre ; la voici en peu de mots : Soyent les côtés du triangle cherché $2a$, $2b$, $2c$, et les droites tirées de leurs milieux vers les angles opposés respectivement f , g , h . Prenez à volonté deux nombres q et r et cherchez $M = \frac{5qq - rr}{4qq}$ et $N = \frac{5rr - 9qq}{4rr}$. Réduisez la fraction $\frac{(M - N)^2 - 4}{4(M + N)}$ à ses moindres termes et nommez le numérateur x et le dénominateur y , et vous aurez le côté $2a = 2qx + (M - N)qy$, et la ligne $f = rx - \frac{1}{2}(M - N)ry$. Faites $p = x + y$ et $s = x - y$, et vous aurez les côtés $2b = pr - qs$ et $2c = pr + qs$, et les lignes $g = \frac{3pq + rs}{2}$ et $h = \frac{3pq - rs}{2}$.

(10) Euler, *Démonstration de la somme de cette suite* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$, E.O. XIV, p. 177 à 186. (1743).

Posons avec Euler $BF = CF = a$;
 $CG = AG = b$; $AH = BH = c$; $AF = f$;
 $BG = g$; $CH = h$. Nous qualifierons
d'associés les triangles ABC et AFJ ,
les côtés de ce dernier étant égaux aux
médianes du premier. On peut
remarquer d'emblée que les médianes
du second seront les $3/4$ des côtés
du premier, d'où l'idée d'associer les
deux triangles (figure 1).

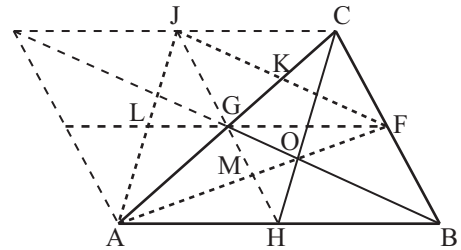


Figure 1

On a :

$$f^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 ; g^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2 ; h^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Il s'agit donc de résoudre en nombres rationnels (se qui se ramène à résoudre en nombres entiers) un système de trois équations à six inconnues, mais qui implique aussitôt les trois autres équations :

$$(3a)^2 = 2g^2 + 2h^2 - f^2 ; (3b)^2 = 2h^2 + 2f^2 - g^2 ; (3c)^2 = 2f^2 + 2g^2 - h^2$$

d'après la propriété mise en évidence ci-dessus, sur les triangles associés. On en déduit dans un premier temps :

$$g^2 - h^2 = 3(c^2 - b^2)$$

et

$$g^2 + h^2 = 4a^2 + b^2 + c^2.$$

Une première idée serait de répartir les facteurs, en supposant $c + b$ et $c - b$ premiers entre eux, c'est-à-dire

$$\begin{cases} g+h=3(c+b) \\ g-h=c-b \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} g+h=c-b \\ g-h=3(c+b) \end{cases}$$

mais cela conduit à $a = b + c$, donc un triangle aplati. Posons donc plutôt :

$$g + h = 3pq ; g - h = rs ; c + b = pr \text{ et } c - b = qs,$$

(à des variations de signe près, mais Euler n'en tient pas compte ici. Il ne donne non plus aucune indication sur ce que sont p, q, r, s , mais on comprend bien que ce sont des rationnels). Nous en déduisons

$$g = \frac{3pq + rs}{2} \text{ et } h = \frac{3pq - rs}{2} ; c = \frac{pr + qs}{2} \text{ et } b = \frac{pr - qs}{2},$$

puis

$$16a^2 = 2p^2(9q^2 - r^2) + 2s^2(r^2 - q^2) \text{ et } 16f^2 = 18p^2(r^2 - q^2) + 2s^2(9q^2 - r^2) ;$$

ou, en posant $p = x + y$ et $s = x - y$,

$$4a^2 = 4q^2(x^2 + y^2) + 2xy(5q^2 - r^2) \text{ et } 4f^2 = 4r^2(x^2 + y^2) + 2xy(5r^2 - 9q^2).$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{a^2}{q^2} = x^2 + y^2 + 2Mxy \text{ et } \frac{f^2}{r^2} = x^2 + y^2 + 2Nxy$$

avec

$$M = \frac{5q^2 - r^2}{4q^2} \text{ et } N = \frac{5r^2 - 9q^2}{4r^2}.$$

Comme on veut arriver à des seconds membres carrés, Euler pose

$$\frac{a}{q} = x + ty \text{ et } \frac{f}{r} = x + uy,$$

ce qui conduit à :

$$\frac{x}{y} = \frac{1-t^2}{2(t-M)} = \frac{1-u^2}{2(u-N)}.$$

Cela est possible avec

$$u = -t = \frac{N-M}{2}; \quad \frac{x}{y} = \frac{(M-N)^2 - 4}{4(M+N)}$$

donc, en particulier avec

$$x = (M-N)^2 - 4 \text{ et } y = 4(M+N).$$

Les cas $r = q$ et $r = 3q$ sont exclus car on doit avoir $M + N \neq 0$.

Euler donne un premier exemple correspondant à $q = 1$ et $r = 2$, et trouve (en changeant occasionnellement les signes négligés plus haut, lorsque c'est nécessaire pour avoir des mesures de côtés positives et en multipliant par un facteur entier pour éliminer les dénominateurs) :

$$a = 128; b = 127; c = 131; f = 204; g = 261; h = 255.$$

Puis il fait remarquer que si l'on connaît un sextuple (a, b, c, f, g, h) formé des trois côtés d'un triangle et de ses médianes, on en a aussitôt un second, formé par le sextuple $(f, g, h, 3a, 3b, 3c)$ (voir figure 1). Donc nous avons aussi la solution :

$$a = 68; b = 87; c = 85; f = 158; g = 127; h = 131$$

(après avoir simplifié par le facteur commun 3).

Mais Euler ne se satisfait pas de poser x égal au numérateur et y égal au dénominateur, comme il le fait dans un premier temps. Partant des expressions

paramétrées de M et N , il simplifie la fraction donnant $\frac{x}{y}$ et trouve

$$\frac{x}{y} = -\frac{(q^2 + r^2)(9q^2 + r^2)}{16q^2r^2};$$

d'où une autre paramétrisation de x, y, p et s :

$$x = (q^2 + r^2)(9q^2 + r^2); y = -16q^2r^2; p = 3q^2 - r^2; s = 3q^2 + r^2$$

et deux exemples supplémentaires répondant à la question :

q	r	a	b	c	f	g	h
2	1	404	377	619	942	975	477
3	5	2 547	2 699	2 704	4 765	4 507	4 498

Le cas $q = 1, r = 3$ conduit à un triangle aplati ; le cas $q = 2, r = 3$ au même triangle (à un facteur 27 près) que les valeurs $q = 1; r = 2$.

Euler reviendra sur le problème dans deux articles ultérieurs, mais sans apporter de résultat supplémentaire significatif. Dans un papier posthume, on trouvera cependant une note dans laquelle il signale que $2a^2 + 2b^2 - c^2$ est un carré lorsque

$$a = (m + n)p - (m - n)q ; b = (m - n)p + (m + n)q ; c = 2mp - 2nq$$

et indique qu'un ensemble de valeurs donnant un carré est fourni par

$$p = (m^2 + n^2)(9m^2 - n^2), q = 2mn(9m^2 + n^2)$$

ce qui lui donne les valeurs supplémentaires

$$a = 207, b = 328, c = 145 ; a = 881, b = 640, c = 569 ; a = 463, b = 142, c = 529.$$

Le problème donna lieu à de nombreuses recherches dont on trouvera le détail dans Dickson, *History of the theory of numbers*, Ch. V, 202 à 205.

Les triangles automédians

Plutôt que de parcourir ces recherches, nous préférons revenir sur un court paragraphe de l'article d'Euler (le § 3), dans lequel il attire l'attention sur le cas où le triangle des médianes est semblable au triangle initial. Il est facile de démontrer que ceci a lieu si et seulement si

$$b^2 + c^2 = 2a^2$$

(à une permutation de a, b, c près) et le rapport de similitude est alors $\sqrt{\frac{3}{2}}$, ce qui fait qu'ils ne peuvent avoir simultanément les côtés et les médianes rationnels. Mais ils ont d'autres propriétés intéressantes et ont fait l'objet de recherches dès Diophante, sous la forme : trouver les triangles rationnels ayant les carrés de leurs côtés en progression arithmétique, ce qui se ramène à l'équation indéterminée $x^2 + y^2 = 2z^2$. Il y a aussi un intérêt pratique, c'est que z est ce que l'on appelle la moyenne quadratique de x et y . Un trapèze de bases x et y est partagé en deux trapèzes de même aire par un segment parallèle de longueur z , quelle que soit la hauteur du trapèze. Les amateurs de géométrie du triangle au XIX^e siècle, tels Lemoine ou Neuberg⁽¹¹⁾, appelleront ces triangles automédians et en étudieront les multiples propriétés, dont voici un petit échantillon, avec les conventions habituelles d'écriture.

$$2a^2 = b^2 + c^2 = 4bc \cdot \cos A.$$

$$2 \cos 2A = \cos 2B + \cos 2C.$$

$$2 \cotan A = \cotan B + \cotan C.$$

G étant le centre de gravité, les cercles AGB et AGC sont tangents à (BC) resp. en B et C.

Le cercle BGC passe par l'orthocentre H.

Si R, R_a, R_b, R_c désignent les rayons des cercles ABC, GBC, GAC, GAB on a : $R^2 = R_a^2 = R_b^2 = R_c^2$.

La figure 2 met en évidence les trois triangles semblables ABC, AA'V, médian et A'NU médian de AA'V.

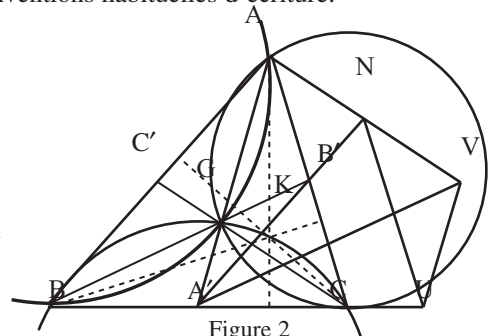


Figure 2

(11) Voir la revue Mathesis, 1889, n° 9, p. 208.