SOLUTION

Les solutions de Marie-Laure CHAILLOUT (95 - Sarcelles), Ivan RIOU (17 - La Rochelle) et l'auteur sont très proches et distinguent les cas : n pair et n impair.

Si n est pair, considérons deux sommets diamétralement opposés A et B du polygone : quel que soit le troisième sommet C, le triangle ABC est rectangle. Si les oiseaux issus de A et B se reposent en A′ et B′,
• soit A′ et B′ sont diamétralement opposés, et quel que soit le troisième oiseau, qui va de C en C′, les triangles ABC et A′B′C′ sont tous deux rectangles (en C et C′ respectivement),
• soit la position C′ diamétralement opposée à A′ est distincte de B′, l'oiseau qui se repose en C′ vient de C et les triangles ABC et A′B′C′ sont tous deux rectangles (en C et B′ respectivement).

Si maintenant n est impair, pour $n = 3$ il existe un seul triangle, acutangle (équilatéral). La valeur $n = 5$ fait exception, et pour $n \geq 7$, il existe plus de triangles obtusangles que de triangles acutangles : comme l'application qui à un triangle de départ ABC associe un triangle d'arrivée A′B′C′ est manifestement bijective, elle ne peut transformer tout triangle obtusangle en un triangle acutangle, donc il existe nécessairement trois oiseaux qui, avant et après l'envol, forment deux triangles tous deux obtusangles.

Il reste donc à dénombrer les triangles acutangles et les triangles obtusangles, compte tenu que, n étant impair, il n'existe pas de triangles rectangles. Pour $n = 2k + 1$, il existe en tout : $\frac{(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)}{6}$ triangles. Si l'on oriente le cercle, à tout triangle obtusangle ABC on peut associer, de manière unique, le sommet A qui précède le sommet B de l'angle obtus. Il existe $2k + 1$ points A, et pour chacun d'eux, les triangles obtusangles s'obtiennent en plaçant deux points B et C de manière quelconque sur les k positions qui suivent le point A, ce qui donne : $\frac{(2k+1)\cdot k\cdot(k-1)}{2}$ triangles obtusangles. Pour qu'un triangle ABC soit acutangle, il faut au contraire que B soit dans les k positions qui suivent A, C dans les k positions qui suivent B, et A dans les k positions qui suivent C (donc C n'est pas dans les k positions qui suivent A), ce qui revient à placer B et C en positions i et $n + j$ telles que: $1 \leq j \leq i \leq k$. Le nombre de possibilités pour un point A donné est donc : $\frac{k(k+1)}{2}$, ce qui donne : $\frac{(2k+1)\cdot k\cdot(k+1)}{6}$ triangles acutangles, compte tenu que chaque triangle acutangle est ainsi compté trois fois (à la différence des triangles obtusangles). On vérifie aisément que :

$$\frac{(2k+1)\cdot k\cdot(k-1)}{2}+\frac{(2k+1)\cdot k\cdot(k+1)}{6}=\frac{(2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1)}{6},$$

mais surtout que, lorsque $k \geq 3$ (donc $n \geq 7$),

$$\frac{(2k+1)\cdot k\cdot(k-1)}{2}>\frac{(2k+1)\cdot k\cdot(k+1)}{6},$$

ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Par contre, lorsque $k = 2$ donc $n = 5$, il existe exactement cinq triangles acutangles et cinq triangles obtusangles (tous isocèles), et, de fait, il existe une permutation qui transforme deux sommets voisins en deux sommets non voisins (donc le polygone régulier en l'étoile à cinq branches), et tout triangle acutangle en un triangle obtusangle (et inversement). En définitive, pour toute valeur de $n \geq 3$ hormis $n = 5$, il existe nécessairement trois oiseaux qui, avant et après l'envol, forment deux triangles tous deux acutangles, tous deux rectangles ou tous deux obtusangles.

Une remarque de Jean Moreau de Saint-Martin suggère un problème différent de celui posé, mais fort intéressant et autrement plus difficile, vraisemblablement non résolu. Pour quelles valeurs de $n > 0$ existe-t-il nécessairement trois oiseaux qui, avant et après l'envol, forment deux triangles tous deux acutangles ? Ce n'est pas le cas pour $n = 4$, 5 ou même 6 (en permutant deux positions voisines, on transforme les deux seuls triangles acutangles en triangles rectangles). Mais c'est le cas pour $n = 7$, et il est vraisemblable que c'est vrai pour une infinité d'autres valeurs de n, peut-être pour tout $n \geq 7$. Limitons-nous à $n = 7$: convenons abusivement que AB $= p$ si A et B sont distants de p positions – donc si, en réalité, $AB = 2R\sin\left(\frac{p\pi}{7}\right)$ –, et supposons que tout triangle acutangle soit transformé en un triangle obtusangle. Si deux oiseaux issus de A et B se reposent en A′ et B′, on ne peut pas avoir simultanément AB = 3 et A′B′ = 3 : en effet, si AB = 3, il existe trois positions C telles que ABC soit acutangle, alors qu'il n'existe que deux positions C′ telles que A′B′C′ soit obtusangle. Si tout triangle de côtés (3, 3, 1) était transformé en un triangle (1, 1, 2), alors de proche en proche l'étoile de côté 3 serait transformée en le polygone, et donc tout triangle acutangle (2, 2, 3) en un triangle acutangle (3, 3, 1). Il existe donc au moins un triangle ABC, AB = AC = 3, BC = 1, transformé en A′B′C′, A′B′ = 1, A′C′ = 2 et B′C′ = 3. Soit D′ le point situé entre A′ et C′. Si D′ provenait d'un voisin D de A, alors quelle que soit l'image E′ de l'autre voisin E de A, l'un des triangles B′D′E′ ou C′D′E′ serait acutangle, or les triangles BDE et CDE sont tous deux acutangles. D′ provient donc d'un point D non voisin de A, et il existe deux points E parmi les trois restants tels que DE = 3. Or il existe une seule position E′ parmi les trois restantes telles que D′E′ ≠ 3, ce qui achève la démonstration.