SOLUTION

Cet énoncé généralise un problème célèbre d'Olympiade Internationale de Mathématiques (énoncé 6 de l'Olympiade 1988 à Canberra, Australie, un des plus difficiles de l'époque…) : « Soient a et b deux entiers strictement positifs, tels que $ab + 1$ divise $a^2 + b^2$. Montrer que : $\dfrac{a^2+b^2}{1+ab}$ est un carré parfait. »

Pierre Samuel avait limité son énoncé au cas où p est premier, mais ce n'est manifestement pas nécessaire. J'ai reçu des solutions de René MANZONI (76-Le Havre) et Jean MOREAU de SAINT-MARTIN (75-Paris).

L'idée essentielle est qu'à partir d'une solution quelconque, on peut construire une suite infinie de solutions : quels que soient p et q, si $\dfrac{x^2+y^2}{xy+p}=q$, alors $\dfrac{y^2+(qy-x)^2}{y(qy-x)+p}=q$. Donc si $(x,\ y)$ est solution associée à $q=\dfrac{x^2+y^2}{xy+p}$, alors $(y,\ qy-x)$ est également associée à q, de sorte que la suite : $x_{n+1}=qx_n-x_{n-1}$, qui peut être parcourue dans les deux sens ($x_{n-1} = qx_n - x_{n+1}$), permet dans un sens de construire une « solution minimale » $(x_n,\ x_{n+1})$ à partir d'une solution quelconque

(x, y), dans l'autre de retrouver toutes les solutions à partir des solutions minimales, lesquelles peuvent être recensées exhaustivement par un nombre fini de tentatives.

Jean Moreau de Saint-Martin donne l'interprétation géométrique de cette suite, ensemble des points entiers de la conique : $x^2 - qxy + y^2 = pq$. En particulier, pour $q = \pm 1$, la conique est une ellipse : $x^2 + xy + y^2 = p$ s'écrit : $(x + y)^2 + 3(x - y)^2 = 4p$, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de solutions, non nul si tous les facteurs premiers de p (d'exposant impair) sont 3 ou congrus à 1 modulo 3. Pour $q = \pm 2$, la conique est décomposée en deux droites : $(x - y)^2 = 2p$ ou $(x + y)^2 = 2p$: si $p = 2k^2$, les solutions sont $(x, x + 2k)$ ou $(x, 2k - x)$. C'est pour $|q| \geq 3$ que la conique devient une hyperbole.

Si p est positif, q est obligatoirement positif : en posant $t = \dfrac{q + \sqrt{q^2 - 4}}{2}$, on a : $t + \dfrac{1}{t} = q$, donc : $x^2 - qxy + y^2 = (x - ty)\left(x - \dfrac{y}{t}\right)$. Si $x \geq y$, $x^2 - qxy + y^2 = pq > 0$ entraîne : $x > ty$, donc $qy - x < \dfrac{y}{t} < y$, la suite ainsi construite est monotone. À un certain rang, elle change de signe, en s'annulant éventuellement au passage. En d'autres termes, toute solution du problème se déduit d'une solution $(a, -b)$ avec $-b \leq 0 < a$ telle que : $p - ab > 0$ divise $a^2 + b^2$. Et pour tout (x, y) de cette suite,

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + p} = q = \frac{a^2 + b^2}{p - ab}.$$

Si $p = 1$, on a obligatoirement $ab = 0$, donc pour toute solution (x, y), $\dfrac{x^2 + y^2}{xy + 1} = q = a^2$ est un carré parfait : c'était le problème d'Olympiade. Mais pour p quelconque, il faut explorer tous les $b < \sqrt{p}$, et pour chacun d'eux tous les a tels que $ab < p$, pour vérifier si $p - ab$ divise $a^2 + b^2$. Cela nous fournit deux suites d'entiers positifs, l'une construite à partir de $(a, -b)$, l'autre à partir de $(b, -a)$. Et pour tout p, il existe au moins une solution minimale : $b = 1$, $a = p - 1$, donnant naissance à deux suites infinies de solutions de : $\dfrac{x^2 + y^2}{xy + p} = p^2 - 2p + 2$, mais il peut y en avoir beaucoup d'autres ! Pour $p = 2\,003$, René Manzoni détermine dix valeurs possibles de $p - ab$, soit 28 valeurs de q, donc 56 suites infinies de solutions. Pour $p = 7$, Pierre Samuel trouve : $(a, b, q) = (1, 6, 37), (2, 3, 13), (1, 5, 13)$, mais aussi $q = 1$ avec seulement deux solutions positives: $(x, y) = (1, 3)$ ou $(3, 2)$.

Si maintenant p est négatif, q peut être négatif ou positif. q négatif impose : $xy + p < 0$, ce qui conduit à un nombre fini de solutions. Mais si $q > 0$, $(x - ty)\left(x - \dfrac{y}{t}\right) = pq < 0$ entraîne : $\dfrac{y}{t} < x < ty$, donc $ty > qy - x > \dfrac{y}{t}$, ce qui montre que tous les termes de la suite sont strictement positifs, le quotient de deux termes consécutifs étant compris entre t et $\frac{1}{t}$. La suite passe par un minimum avant de recroître vers l'infini : pour être sûr de trouver toutes les solutions, il faut donc majorer, pour un q donné, les deux plus petits termes de la suite associée. Or :

$$x^2 - qxy + y^2 = \left(\frac{qy}{2} - x\right)^2 + \left(1 - \frac{q^2}{4}\right)y^2 = pq.$$

Si y et x sont les deux plus petits termes de la suite, $y \le x \le qy - x$, donc

$$0 \le \frac{qy}{2} - x \le \left(\frac{q}{2} - 1\right)y,$$

ce qui donne : $pq \le (2 - q)y^2$, soit (comme $2 - q \le -1$) : $y^2 \le \left(\frac{q}{2-q}\right)p \le 3|p|$. Eu outre, l'équation $\frac{x^2+y^2}{xy+p} = q$ entraîne : $(xy + p)((qy - x)y + p) = p^2 + y^4$. Si $x \le qy - x$, $(xy + p)^2 \le p^2 + y^4 \le 10\,p^2$, donc $xy < \left(\sqrt{10}+1\right)|p|$. Il faut donc explorer tous les $y < \sqrt{3|p|}$, et pour chacun d'eux tous les x tels que $xy < \left(\sqrt{10}+1\right)|p|$, pour déterminer toutes les solutions minimales : cela fournit un peu plus de cas que pour $p > 0$, mais c'est du même ordre. Pour $p = -2\,003$, René Manzoni trouve 18 valeurs possibles du produit xy, conduisant à 32 valeurs de q, donc 32 suites de solutions. Et pour tout $p < 0$, il existe au moins une suite de solutions, construite à partir de $y = 1$, $x = 1 - p$.