**Solution de Serge Parpay (Niort)**

Dans ce qui suit l'aire d'une surface S sera notée $\mathcal{A}$(S), le volume d'un solide V sera noté $\mathcal{V}$(V). Les parenthèses ou crochets en usage maintenant ne seront pas utilisés sauf risque de confusion. Les projections utilisées sont des projections orthogonales : on ne le précisera donc pas à chaque fois.

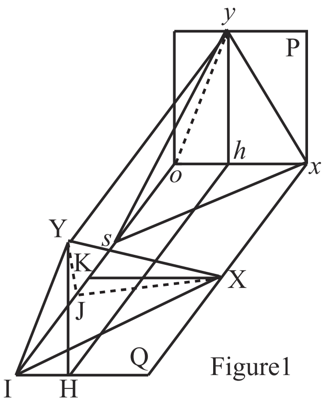

Figure1

Données (figure 1) : Tétraèdre IJXY ;
Q : plan du triangle IJX ; XK : hauteur du triangle IJX ; YH : hauteur du tétraèdre (base IJX) ;
P : plan perpendiculaire à IJ en un point *o* ;
*s* : point de IJ tel que *so* = IJ ;
*x*, *y*, *h* : projections orthogonales de X, Y, H sur P.

Dénomination : *oxy* sera appelé profil du tétraèdre dans la direction IJ.

Les deux tétraèdres IJXY et *soxy* ont même volume :

$$\mathcal{V}(\mathrm{IJXY}) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(\mathrm{IJX})\cdot \mathrm{YH} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\mathrm{IJ}\cdot \mathrm{XK}\right)\cdot \mathrm{YH},$$

$$\mathcal{V}(soxy) = \frac{1}{3}\mathcal{A}(oxy)\cdot so = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}ox\cdot yh\right)\cdot so.$$

Mais IJ = *so*, XK = *ox*, YH = *yh* : l'égalité des volumes est démontrée.

***Propriété*** : **Soit un tétraèdre IJXY, $\ell$ la longueur de l'arête IJ, *oxy* le profil de IJXY dans la direction IJ. Le volume du tétraèdre est $\mathcal{V}(\mathrm{IJXY}) = \frac{1}{3}\ell\cdot\mathcal{A}(\mathrm{oxy})$.**

Remarque : en conséquence, tous les tétraèdres I′J′X′Y′ de profil *oxy* et d'arête I′J′, I′ et J′ étant sur la droite IJ et I′J′ = IJ, ont même volume.

***L'exercice proposé :***

Données (Figure 2) : Tétraèdre ABCD ;
I et J : milieux de AB et CD ;
P : plan perpendiculaire à IJ en un point *o* ; *a*, *b*, *c*, *d* : projections orthogonales de A,B,C,D sur P.

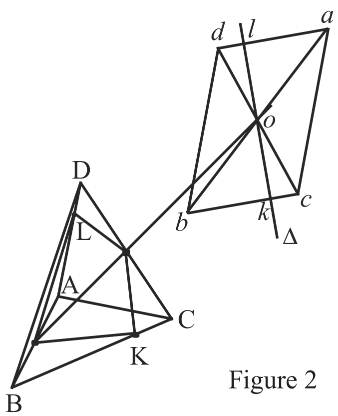

Figure 2

Le quadrilatère *abcd* est le profil du tétraèdre ABCD dans la direction IJ. I et J étant les milieux de AB et CD, *o* (leur projection commune) sera le milieu de *ab* et *cd* : le quadrilatère *abcd* est un parallélogramme de centre *o*.
Soit un plan Π passant par IJ. Π est perpendiculaire à P et toute droite de Π se projette en la droite Δ, intersection de P et de Π, cette droite passant évidemment par *o*.

Le plan $\Pi$ coupera le tétraèdre en deux parties.
Quatre cas sont à envisager :

1) $\Delta$ coupe $ad$ en $\ell$ et $bc$ en $k$ : le plan $\Pi$ coupe alors AD en L (se projetant en $\ell$) et BC en K (se projetant en $k$).

2) Cas limite du cas précédent : $\ell$ en $a$, $k$ en $b$, donc L en A et K en B.

3) $\Delta$ coupe $bd$ en $\ell'$ et $ac$ en $k'$ : le plan $\Pi$ coupe alors BD en L′ (se projetant en $\ell'$) et AC en K′ (se projetant en $k'$).

4) Cas limite du cas précédent : $\ell'$ en $d$, $k'$ en $c$, donc L′ en D et K′ en C.

Dans ces différents cas, les sections du tétraèdre par le plan $\Pi$ sont le quadrilatère IKJL, le triangle BJA, le quadrilatère IK′JL′, le triangle ICD.
Le raisonnement suivant porte sur le cas 1). Les autres cas se traiteraient par un raisonnement semblable (certains volumes seraient nuls).
On découpe le tétraèdre en six tétraèdres d'arête commune IJ : IJLD, IJDB, IJBK, IJKC, IJCA et IJAL. Leurs profils sont respectivement $o\ell d$, $odb$, $obk$, $okc$, $oca$ et $oa\ell$.
On a par symétrie de centre $o$ et calcul des volumes selon la propriété énoncée plus haut :
$\mathcal{A}(o\ell d) = \mathcal{A}(okc)$ donc $\mathcal{V}(\text{IJLD}) = \mathcal{V}(\text{IJKC})$,
$\mathcal{A}(odb) = \mathcal{A}(oca)$ donc $\mathcal{V}(\text{IJDB}) = \mathcal{V}(\text{IJCA})$,
$\mathcal{A}(obk) = \mathcal{A}(oa\ell)$ donc $\mathcal{V}(\text{IJBK}) = \mathcal{V}(\text{IJAL})$.
En « regroupant » les tétraèdres IJLD, IJDB et IJBK d'une part, les tétraèdres IJKC, IJCA, IJAL d'autre part et compte tenu des égalités précédentes, on prouve que les deux polyèdres IKJLBD et IJKLAC ont même volume, volume égal en conséquence à la moitié du volume du tétraèdre ABCD. Il en est de même des cas limites : les tétraèdres ABJC et ABJD, CDIA et CDIB.

**Tout plan passant par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre coupe ce tétraèdre en deux parties équivalentes.**
Remarque : tous les tétraèdres de profil $abcd$ relativement à IJ (I milieu de AB, J milieu de CD, IJ de longueur donnée $\ell$) ont la même propriété, les volumes restant les mêmes.