Solution de Louis Rivoalan (Rochefort)

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires et O l'isobarycentre de ces quatre points. Soit I, J, K, L, P et Q les milieux respectifs de [AC], [BD], [AD], [BC], [CD] et [AB].

Un calcul barycentrique usuel montre que O est aussi le milieu de [IJ], [KL] et [QP].

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$; $\vec{v} = \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right)$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

Considérons le repère $\left(O, \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)\right)$. Dans ce repère, les points A, B, C et D ont pour coordonnées : A (1 ; 1 ; 1) ; B (–1 ; –1 ; 1) ; C (1 ; –1 ; –1) et D (–1 ; 1 ; –1).

Considérons la transformation affine f qui au point M (x ; y ; z) associe M′ (x' ; y' ; z') avec : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$. L'application linéaire associée est définie par les mêmes relations , et on a : $f\left(\vec{u}\right) = \vec{u}$; $f\left(\vec{v}\right) = -\vec{v}$; $f\left(\vec{w}\right) = -\vec{w}$. On a $f \circ f = \mathrm{Id}$.

De plus f(A) = C, f(B) = D, f(I) = I, f(J) = J et f(O) = O. Par suite l'image de [AB] est [CD] et celle d'un plan π $\left(O, \vec{u}, \vec{t}\right)$ avec $\vec{t} = a\vec{v} + b\vec{w}$ est π′ $\left(O, \vec{u}, -a\vec{v} - b\vec{w}\right)$.

Donc π′ = π.

Soit M le point d'intersection de π et de [AB] et P = f(M). Alors

$$P = f([AB] \cap \pi) = f([AB]) \cap f(\pi) = [CD] \cap \pi.$$

Rappel : le volume d'un tétraèdre ABCD est $\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$.

Pour montrer l'invariance énoncée par J. Hadamard, il suffit de montrer que le volume de AMIJ est égal à celui de CPIJ. En effet, les volumes formés par le tétraèdre et le plan π sont respectivement égaux à ABCJ + IJCP – AMIJ d'une part et ACDJ + AMIJ – IJCP d'autre part, et il est facile de voir que les volumes de ABCJ et de ACDJ sont égaux à la moitié du volume de ABCD.

$$\det\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IP}\right) = \det\left(f\left(\overrightarrow{IJ}\right), f\left(\overrightarrow{IA}\right), f\left(\overrightarrow{IM}\right)\right) = \det(f) \times \det\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}\right).$$

Or det (f) = –1.Par suite

$$V(IJCP) = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IP}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM}\right)\right| = V(IJAM).$$

Ce qui démontre la proposition.