Solution de Pierre Chevrier (Niort)

Des exemples pour voir :

$3 \times 37 = 111$; $7 \times 15\,873 = 111\,111$; $9 \times 12\,345\,679 = 111\,111\,111$; $11 \times 1 = 11$; $13 \times 8\,547 = 111\,111$; $17 \times 65\,359\,477\,124\,183 = 111\,111\,111\,111\,111$.

Reformulation du problème :

Dire qu'un nombre est impair et non divisible par 5 équivaut à dire qu'il est premier avec 10.
Dire que l'écriture décimale d'un nombre ne comporte que des 1 signifie que ce

nombre est de la forme $\dfrac{10^{n+1}-1}{9}$ (n entier naturel). $\left[1+10+\ldots+10^n = \dfrac{10^{n+1}-1}{9}\right]$.

Il s'agit donc d'établir que, pour tout nombre x premier avec 10, $9x$ a un multiple de la forme $10^{n+1} - 1$.

Une démonstration au niveau de terminale S :

Soit x un entier premier avec 10, alors $9x$ est aussi premier avec 10 ; pour tout entier p, désignons par r_p le reste obtenu dans la division euclidienne de 10^p par $9x$; tous les restes r_p vérifient $1 \leq r_p < 9x$.
Parmi les restes r_1 , r_2 , …, r_{9x}, il y en a donc au moins deux égaux, r_s et r_t avec $s < t$.
On a donc des égalités de la forme $10^t = k \times 9x + r_t$; $10^s = \ell \times 9x + r_s$, avec $r_s = r_t$, d'où, en retranchant membre à membre :

$$10^t - 10^s = (k - \ell) \times 9x,$$

$$10^s\,(10^{t-s} - 1) = (k - \ell) \times 9x.$$

$9x$ est premier avec 10^s ; il divise par conséquent $10^{t-s} - 1$, d'après le théorème de Gauss. C.Q.F.D.

Remarque :

La méthode utilisée dans cette démonstration peut faire l'objet d'un algorithme pour trouver effectivement un multiple du nombre x ne comportant que des 1 dans son écriture dans le système décimal ;
(exemple : $x = 3$; les deux premières puissances de 10 donnant le même reste dans la division par $27 = 3 \times 9$ sont 10^2 et 10^5. $10^3 - 1 = 999 = 9 \text{ x } 111$; on trouve 111).
Au niveau terminale + ? , le résultat repose sur le théorème d'Euler ; en effet, on peut reformuler le problème ainsi : il s'agit de trouver un entier n tel que

$$10^{n+1} \equiv 1 \pmod{9x} ;$$

or $9x$ étant premier avec 10, le théorème d'Euler nous dit que

$$10^{\varphi(9x)} \equiv 1 \pmod{9x}.$$