
Extrait de *Le Opere de Galileo Galilei* , Firenze, 1855.vol.XIV, p. 293-316 (texte original, Mss. Palatini, Par.V1₁ Tome 3)

« Que dans ce jeu de dés certains points soient plus avantageux que d'autres, on en a une explication très évidente, qui consiste dans le fait que ceux-là peuvent sortir plus facilement et plus souvent que ceux-ci, ce qui dépend de leur capacité à se former avec plusieurs sortes de chiffres »...

... « Et que le 9 et le 10 se forment (et ce que l'on dit de ceux-ci s'entend pour leurs symétriques le 12 et le 11) se forment, dis-je, avec la même diversité de chiffres, est évident ; en effet le 9 se compose en 1-2-6, 1-3-5, 1-4-4, 2-2-5, 2-3-4, 3-3-3, qui sont six triplets, et le 10 en 1-3-6, 1-4-5, 2-2-6, 2-3-5, 2-4-4, 3-3-4, et non d'autres façons ce qui fait aussi six combinaisons »...

... « [Deux dés présentent 36 sorties]. Puisque chacune des faces [du troisième dé], qui sont aussi au nombre de six, peut s'accoupler avec chacune des 36 sorties des deux autres dés, nous aurons que les sorties des trois dés sont au nombre de six fois 36, soit 216, toutes différentes »...

« Mais puisque les sommes des tirages des trois dés ne sont qu'au nombre de 16, c'est à dire 3, 4, 5 jusqu'à 18, entre lesquelles on a à répartir les dites 216 sorties, il est nécessaire que pour quelques-unes de ces sommes on ait beaucoup de sorties et, si nous trouvons combien on en a pour chacune, nous aurons ouvert la voie pour découvrir tout ce que nous cherchons, et il suffira de faire une telle recherche du 1 au 10, puisque ce qui conviendra à l'un de ces nombres conviendra encore à son symétrique ».

« ... Alors on voit que la somme 10 peut se faire par 27 sorties de dés différentes, mais la somme 9 par 25 seulement ».

« ... Toute personne qui s'entend au jeu pourra mesurer très exactement tous les avantages, pour minimes qu'ils soient, des parties de dés, des tournois et de toute autre règle particulière que l'on observe dans le jeu ».

Source secondaire :

« Naissance des probabilités du 13^e au 18^e siècle – I – Les premiers pas », Michel Henry, Journées APMEP 2006, Atelier AVa 11,

Notions visées :

Dénombrement – Notion d'équiprobabilité

Texte n°2

Huygens, 1657 : *De ratiociniis in aleae ludo*. (Du calcul dans les jeux de hasard).

Préface :

Quoique dans les jeux de hasard pur les résultats soient incertains, la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a cependant une valeur déterminée. Exemple: si quelqu'un parie de jeter avec un dé six points au premier coup, il est incertain s'il gagnera ou s'il perdra; mais ce qui est déterminé et calculable c'est combien la chance qu'il a de perdre son pari surpasse celle qu'il a de le gagner. [...]

[J]e pars de l'hypothèse que dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est-à-dire par un jeu qui ne vise au détriment de personne. Exemple: si quelqu'un cache à mon insu trois écus dans une main et sept dans l'autre, et me donne à choisir entre les deux mains, je dis que cette offre a pour moi la même valeur que si j'étais certain d'obtenir cinq écus; en effet, lorsque je possède cinq écus, je puis de nouveau me mettre dans le cas d'avoir des chances égales d'obtenir trois ou sept écus, et cela dans un jeu équitable, comme cela sera démontré plus bas.

PROPOSITION I.

Avoir des chances égales d'obtenir a ou b me vaut $\frac{a+b}{2}$

Afin de non seulement démontrer cette règle mais aussi de la découvrir, appelons x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x , je puisse me procurer de nouveau la même chance par un jeu équitable. Supposons que ce jeu soit le suivant. Je joue x contre une autre personne, dont l'enjeu est également x ; il est convenu que celui qui gagne donnera a à celui qui perd. Ce jeu est équitable, et il appert que j'ai ainsi une chance égale d'avoir a en perdant, ou $2x - a$ en gagnant le jeu; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $2x$, duquel je dois donner a à l'autre joueur. Si $2x - a$ était égal à b , j'aurais donc une chance égale d'avoir a ou d'avoir b . Je pose donc $2x - a = b$, d'où je tire la valeur de ma chance $x = \frac{a+b}{2}$. La preuve en est aisée. En effet, possédant $\frac{a+b}{2}$, je puis hasarder cette somme contre un autre joueur qui mettra également $\frac{a+b}{2}$, et convenir avec lui que le gagnant donnera a à l'autre. J'aurais de sorte une chance égale d'avoir a si je perds, ou b si je gagne; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu $a + b$ et je lui en donne a .

PROPOSITION II.

Avoir des chances égales d'obtenir a , b ou c me vaut $\frac{a+b+c}{3}$

[...]

PROPOSITION III.

Avoir p chances d'obtenir a et q chances d'obtenir b , les chances étant équivalentes, me vaut $\frac{pa+qb}{p+q}$

[...]

Source secondaire :

L'espérance du hollandais ou le premier traité de calcul du hasard, IREM de Basse-Normandie, Ellipses, 2005

Notions visées :

Notion d'espérance mathématique

Textes n°3

Huygens – *Ratiociniis in aleae ludo*, 1657, traduction française « du calcul dans les jeux de hasard » in tome 4, Œuvres complètes, 22 vol. 1888-1950, La Haye – p. 76

« D’abord qu’on peut faire avec un dé six coups différents également vraisemblables. Car je suppose que le dé a la forme d’un cube parfait. Ensuite qu’on peut faire 36 coups différents avec deux dés, lesquels ont aussi des vraisemblances égales. En effet, avec chaque coup du premier dé chacun des 6 coups du deuxième dé peut se combiner. Et 6 fois 6 font 36. »

Lettre de Fermat à Pascal du 25 septembre 1654 (extrait)

« Le premier peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois. S’il gagne en une seule partie, il faut qu’avec un dé qui a trois faces, il rencontre la favorable du premier coup. »

Nicolas Bernoulli, lettre à Montmort du 23 janvier 1713

« Or je vous prouverai qu’il y a beaucoup plus à parier qu’entre 14000 enfants, le nombre de mâles ne sera ni plus grand ni plus petit que 7200 de 163, ... Pour cette fin imaginons 14000 dés à 35 faces chacun, dont 18 soient blanches & 17 noires [...] »

Source secondaire :

L'espérance du hollandais ou le premier traité de calcul du hasard, IREM de Basse-Normandie, Ellipses, 2005
Autour de la modélisation en probabilités, Michel HENRY (coord.), 2001

Notions visées :

Aborder la notion de modèle ;

Comprendre qu’un modèle n’est pas un objet réel (difficile d’imaginer un dé à 3 ou 35 faces !) mais un support pour faire des calculs ;

Faire le lien avec le modèle de l’urne (lancer des « dés à 35 faces chacun, dont 18 soient blanches & 17 noires » c’est comme tirer dans une urne parfaite avec 35 boules dont 18 blanches et 17 noires)

Texte n°4

Extraits de *Ars Conjectandi* – Jacques Bernoulli (1713)

Quatrième partie : *L'Art de conjecturer traitant de l'usage et de la doctrine précédente aux affaires civiles, morales et économiques.*

Page 20 :

Ce qui est certain et indubitable, nous disons que nous le *savons* ou que nous le *comprenons* ; tout le reste nous le *conjecturons* ou le *présumons*.

Conjecturer quelque chose, c'est mesurer sa probabilité : ainsi *l'art de conjecturer* ou la *stochastique* se définit pour nous comme l'art de mesurer aussi exactement que possible les probabilités des choses. Le but est que, dans nos jugements et dans nos actions, nous puissions toujours choisir ou suivre le parti que nous aurons découvert comme meilleur, préférable, plus sûr ou mieux réfléchi. C'est en cela seulement que réside toute la sagesse du Philosophe et toute la sagacité du Politique.

Les probabilités sont estimées d'après le *nombre* et aussi le *poids des arguments* qui de quelque manière prouvent ou révèlent que quelque chose est, sera ou a été. En outre, par le *poids*, j'entends la force de ce qui prouve.

Page 40 :

On en est ainsi venu à ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose, il est seulement requis, d'une part, que les nombres de cas soient soigneusement déterminés et, d'autre part, que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres. Mais c'est ici enfin que surgit une difficulté, nous semble-t-il : cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard que leurs premiers inventeurs ont pris soin d'organiser en vue de se ménager l'équité, de telle sorte que fussent assurés et connus les nombres de cas qui doivent entraîner le gain ou la perte, et de telle sorte que tous ces cas puissent arriver avec une égale facilité. En effet, lorsqu' il s'agit de tous les autres résultats, dépendant pour la plupart soit de l'œuvre de nature soit de l'arbitre des hommes, cela n'a pas du tout lieu.

Ainsi, par exemple, les nombres de cas sont connus lorsqu'il s'agit des dés, car pour chacun des dés les cas sont manifestement aussi nombreux que les bases, et ils sont tous également enclins à échoir ; car, à cause de la similitude des bases et du poids uniforme des dés, il n'y a point de raison pour qu'une des bases soit plus encline à échoir que l'autre, comme cela arriverait si les bases étaient de formes dissemblables, ou si le dé était constitué d'un côté d'une matière plus lourde que de l'autre. [..] Mais qui donc parmi les mortels définira par exemple le nombre de maladies, qui sont autant de cas, qui ont le pouvoir d'envahir les innombrables parties du corps humain à l'âge qu'on voudra et qui ont le pouvoir de nous apporter la mort ? Qui définira combien est plus facile à celle-ci qu'à celle-là, la peste ou l'hydropisie, l'hydropisie ou la fièvre, d'anéantir un homme, en sorte qu'à partir de là puisse être formée une conjecture sur un état futur de vie ou de mort ?

[...] Mais à la vérité ici s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir *a priori* l'est du moins *a posteriori*, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables ; ou on doit présumer que, par la suite, chaque fait peut arriver et ne pas arriver dans le même nombre de cas qu'il avait été constaté auparavant, dans un état de choses semblables, qu'il arrivait ou n'arrivait pas.

[...] Enfin il ne peut échapper à personne que, pour juger par ce moyen de quelque événement, il ne suffirait pas d'avoir fait choix d'une ou deux expériences, mais qu'il serait requis une grande quantité d'expériences.[...]

Page 44-46 :

Il reste assurément à chercher si, en augmentant ainsi le nombre des observations, nous augmentons continuellement la probabilité d'atteindre le rapport réel entre les nombres de ceux qui font qu'un événement peut arriver et le nombre de ceux qui font qu'il ne peut arriver, de sorte que cette probabilité dépasse enfin un degré quelconque donné de certitude ; ou si le Problème, pour ainsi dire, a son Asymptote, c'est-à-dire s'il existe un degré de certitude qu'il n'est jamais possible de dépasser, de quelque manière qu'on multiplie les observations, d'avoir découvert le vrai rapport des cas ; que, par exemple, nous ne pouvons jamais obtenir de certitude au-delà de la moitié, ou de $\frac{2}{3}$ ou de $\frac{3}{4}$. Un exemple rendra clair ce que je voudrais dire.

Je suppose que, dans une urne, à ton insu soient placées trois mille pierres blanches et deux mille pierres noires ; je suppose, que pour connaître leurs nombres par expérience, tu tires une pierre après l'autre (en remplaçant cependant chaque fois la pierre que tu as tirée avant de choisir la suivante pour que le nombre des pierres ne diminue pas dans l'urne) ; tu observes combien de fois sort une pierre blanche et combien de fois une noire. On demande si tu peux le faire tant de fois qu'il devienne dix fois, cent fois, mille fois, etc..., plus probable (c'est-à-dire qu'il devienne moralement certain) que le nombre de fois où tu choisis une pierre blanche et le nombre de fois où tu choisis une pierre noire soient dans ce même rapport sesquialtère où se complaisent à être entre eux les nombres de pierres ou de cas, plutôt que dans tout autre rapport différent de celui-ci. Car si cela ne se produisait pas, j'avoue que c'en serait fait de notre effort pour rechercher expérimentalement le nombre de cas. Mais si nous l'obtenons et si nous acquérons enfin par ce moyen la certitude morale (et je montrerai dans le chapitre suivant que cela aussi se produit réellement), nous aurons trouvé *a posteriori* les nombres de cas presque comme s'ils nous étaient connus *a priori*.

Mais pour que cela ne soit pas compris autrement qu'il ne convient, il faut bien noter ce qui suit ; je voudrais que le rapport entre les nombres de cas que nous entreprenons de déterminer expérimentalement ne fût pas pris de façon nette et sans partage (car ainsi, c'est tout le contraire qui arriverait et il deviendrait d'autant moins probable de découvrir le vrai rapport qu'on ferait de plus nombreuses observations), mais je voudrais que le rapport fût admis avec une certaine latitude, c'est-à-dire compris entre une paire de limites, pouvant être prises aussi rapprochées qu'on voudra.

Assurément, si dans l'exemple des pierres proposé plus haut nous prenons les deux rapports $\frac{301}{200}$ et $\frac{299}{200}$, ou $\frac{3001}{2000}$ et $\frac{2999}{2000}$, etc... dont le sesquialtère est très près et du plus grand et du plus petit, on montrera que l'on peut arriver à ce que le rapport trouvé grâce à des expériences recommencées de nombreuses fois tombe entre ces limites du rapport sesquialtère plus probablement, de toute probabilité donnée, qu'en dehors.

Source secondaire :

Ars Conjectandi – Jacques Bernoulli (1713), édition bilingue, trad. Norbert Meusnier, IREM de Rouen, 1987.

Notions visées :

Notion de modèle – Urne de Bernoulli

Statistiques inférentielles

Lien entre probabilités et statistiques

Probabilités a priori / a posteriori

Texte n°5

Lettre de Pascal à Fermat, 29 juillet 1654 (Pascal, œuvres complètes, Louis LAFUMA, L'intégrale - SEUIL, 1963)

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est en jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles et vous me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Sources secondaires :

Enseigner les mathématiques en seconde. Statistiques et Probabilités : 4 parcours , IREM de Poitiers, 2016

Le problème des partis, groupe M : A.T.H., Mnémosyne n°6, groupe M : A.T.H., 1993, p.15 – 25

<http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97101.pdf>

Notions visées :

Notion d'espérance mais le texte n'est pas facile à utiliser avec des élèves ... il est intéressant à connaître en regard du texte suivant qui décrit la méthode de Fermat

Texte n°6

Lettre de Pascal à Fermat, 24 aout 1654 (Pascal, œuvres complètes, Louis LAFUMA, L'intégrale - SEUIL, 1963)

« Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti il faut (dites-vous), voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion [...]

Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisque'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties) ; et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils peuvent en avoir seize, qui est le second degré de quatre, c'est à dire le carré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second ; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes : aaaa [...] bbbb.

Et parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il y en a 11 pour lui ; et parce qu'il manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois b le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a deux joueurs... »

Source secondaire :

Enseigner les mathématiques en seconde. Statistiques et Probabilités : 4 parcours, IREM de Poitiers, 2016

Le problème des partis, groupe M : A.T.H., Mnémosyne n°6, groupe M : A.T.H., 1993, p.15 – 25

<http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97101.pdf>

Notions visées :

Dénombrer les cas possibles ; tirages successifs

Introduire la notion d'arbre des possibles

Texte n°7

Lire l'article suivant écrit par D'Alembert dans l'*Encyclopédie*.

CROIX OU PILE (analyse des hasards)

Ce jeu, qui est très connu, & qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amènera croix en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans les auteurs, & suivant les principes ordinaires, est celle-ci.

Il y a quatre combinaisons [...]: Croix Croix ; Pile Croix ; Croix Pile ; Pile Pile

De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre & trois font gagner ; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. [...]

Cependant cela est-il bien exact ? Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent croix au premier coup ? Car, dès qu'une fois croix est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien.

Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles : Croix, premier coup ; Pile, Croix, premier & second coup ; Pile, pile, premier & second coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier.

Source secondaire :

Enseigner les mathématiques en seconde. Statistiques et Probabilités : 4 parcours , IREM de Poitiers, 2016

Notions visées :

Dénombrement ; cas équiprobable

Simulation ; intervalle de fluctuation

Ces textes ont été présentés dans l'atelier « Aborder les probabilités en seconde à partir de textes historiques » de

Nathalie Chevalarias – Atelier D1-01 aux Journées APMEP Nantes 2017