Extraits du livre de géométrie de Henri Bos

GÉOMÉTRIE

ÉLÉMENTAIRE

PAR

H. BOS

Ancien élève de l'École normale supérieure, Agrégé des sciences,
Ancien inspecteur de l'Académie de Paris

DIX-HUITIÈME ÉDITION

PARIS
LIBRAIRIE HACHETTE ET Cie
79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1903

Pages 8-13

§ III. Triangles. — Cas d'égalité les plus simples. — Propriétés du triangle isocèle. — Cas d'égalité du triangle rectangle.

...

31. Théorème. *Deux triangles qui ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, sont égaux.*

Soient deux triangles ABC, DEF (fig. 18), dans lesquels on a :

$$AB = DE\text{ ; angle } A = \text{angle } D\text{ ; angle } B = \text{angle } E\text{ ;}$$

je dis que ces deux triangles sont égaux.

En effet, je transporte le triangle DEF sur le triangle ABC de manière que le côté DE coïncide avec son égal AB, le point D tombant sur le point A, et le point E sur le point B ; l'angle D étant égal à l'angle A, le côté DF prendra la direction AC,

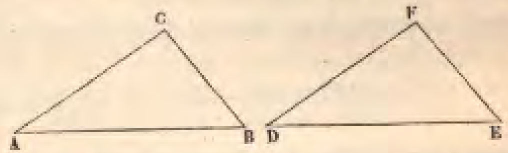

Fig. 18.

et le point F tombera quelque part sur AC. De même l'angle E étant égal à l'angle B, le côté EF prendra la direction BC, et le point F tombera quelque part sur BC. Le point F, devant tomber à la fois sur AC et sur BC, coïncidera avec le point C ; donc les deux triangles coïncident, et, par conséquent, sont égaux. C. Q. F. D.

Remarque. Les égalités

$$AB = DE,\ \text{angle } A = \text{angle } D,\ \text{angle } B = \text{angle } E,$$

entraînent comme conséquences

$$AC = DF, \quad BC = EF, \quad \text{angle } C = \text{angle } F.$$

32. Théorème. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, sont égaux.*

Soient ABC, DEF (fig. 19) deux triangles dans lesquels on a :

$$\text{angle } C = \text{angle } F; \quad CA = FD; \quad CB = FE;$$

je dis qu'ils sont égaux.

Transportons le triangle DEF sur le triangle ABC de manière que le côté FD coïncide avec son égal CA : l'angle F étant égal à l'angle C, le côté FE prendra la direction CB ;

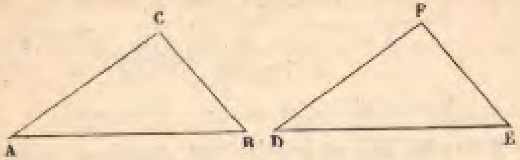

Fig. 19.

et comme FE est égal à CB, le point E tombera au point B ; les côtés DE et AB, ayant les mêmes extrémités, coïncideront aussi ; donc les triangles sont égaux. C. Q. F. D.

REMARQUE. Les égalités.

$$\text{angle } C = \text{angle } F, \quad CA = FD, \quad CB = FE,$$

entraînent les suivantes :

$$\text{angle } A = \text{angle } D, \quad \text{angle } B = \text{angle } E, \quad AB = DE.$$

33. THÉORÈME. *Si deux triangles ont un angle inégal compris entre côtés égaux chacun à chacun, les troisièmes côtés sont inégaux, et celui qui est opposé au plus grand angle est le plus grand.*

Soient ABC, DEF (fig. 20) deux triangles dans lesquels on a :

$$CA = FD, \quad AB = DE, \quad CAB > D;$$

je dis que le côté BC, opposé au plus grand angle BAC, est plus grand que le côté EF opposé à l'angle D.

En effet, je transporte le triangle DEF sur le triangle ABC de manière que le côté ED coïncide avec son égal BA ; l'angle D étant plus petit que l'angle A, le côté DF tombera dans l'intérieur de l'angle CAB, et le triangle DEF occupera la position ABG. Je mène la bissectrice AH de l'angle GAC, qui

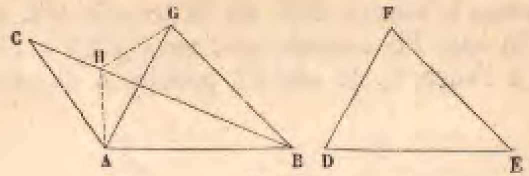

Fig. 20.

coupe en H le côté BC, et je joins GH. Les deux triangles AGH, ACH ont le côté AH commun, le côté AG égal à AC par hypothèse, et les angles GAH et CAH égaux par construction ; donc ils sont égaux (**32**), et on a : $CH = GH$. Or (**29**)

$$BG < BH + GH;$$

en remplaçant BG par son égal EF, et GH par son égal CH, on a :

$$EF < BC. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

34. THÉORÈME. Réciproquement, *si deux triangles* ABC, DEF *ont deux côtés égaux chacun à chacun*, $AB = DE$, *et* $AC = DF$, *et que les troisièmes côtés* BC *et* EF *soient inégaux, les angles* A *et* D, *opposés aux côtés inégaux, sont inégaux, et le plus grand angle est opposé au plus grand côté* (fig. 20).

En effet, les angles A et D ne peuvent être égaux ; car alors les triangles ABC, DEF auraient un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, et par conséquent seraient égaux (**32**) ; les troisièmes côtés BC et EF seraient aussi égaux, ce qui est contraire à l'hypothèse. Les angles A et D sont donc inégaux ; mais alors, en vertu du théorème précédent, le plus grand est opposé au plus grand côté. C. Q. F. D.

Pages 18-19

35. Théorème. *Deux triangles qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun, sont égaux.*

Soient ABC, DEF (fig. 19) deux triangles dans lesquels on a :

$$AB = DE, \quad AC = DF, \quad BC = EF;$$

je dis que l'angle A est égal à l'angle D; car s'ils étaient inégaux, les côtés opposés BC et EF seraient inégaux (**33**), ce qui est contre l'hypothèse ; donc les angles A et D sont égaux ; mais alors les triangles sont égaux en vertu du théorème du nº **32**. C. Q. F. D.

Remarque. Les égalités

$$AB = DE, \quad AC = DF, \quad BC = EF$$

entraînent les suivantes,

$$\text{angle } A = \text{angle } D, \quad \text{angle } B = \text{angle } E, \quad \text{angle } C = \text{angle } F.$$

36. Remarque générale. Les théorèmes des nºs **31**, **32** et **35** constituent ce qu'on appelle les trois cas d'égalité des triangles, et l'on en fait un usage fréquent en géométrie. Ces théorèmes montrent que si trois éléments d'un triangle, angles ou côtés, convenablement choisis, sont égaux aux trois éléments correspondants d'un autre triangle, les deux triangles sont égaux dans toutes leurs parties ; de telle sorte que l'égalité des trois premiers éléments chacun à chacun entraîne comme conséquence l'égalité des trois autres ; on conçoit sans peine le parti qu'on peut tirer de ces théorèmes pour démontrer l'égalité de deux lignes ou de deux angles appartenant à une même figure ou à deux figures différentes.

Il est essentiel de remarquer que, dans deux triangles égaux, les côtés égaux sont toujours opposés aux angles égaux.

§ IV. Lieu géométrique des points équidistants de deux points. — Lieu géométrique des points équidistants de deux droites qui se coupent.

48. Théorème. *Si au milieu d'une droite on élève une perpendiculaire à cette droite :*

1º *Tout point de cette perpendiculaire est également distant des extrémités de la droite;*

2º *Tout point également distant des extrémités de la droite appartient à cette perpendiculaire* (fig. 26).

1º Soient CD la perpendiculaire élevée au milieu C de la droite AB, M un point de cette droite ; je joins MA, MB; ces deux droites sont égales comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

2º Soit P un point également distant des points A et B, PA = PB; je joins PC; le triangle PAB étant isocèle, la ligne PC qui joint le sommet P de ce triangle au milieu de la base est perpendiculaire à cette base ; donc le point P est sur la perpendiculaire DC. C. Q. F. D.

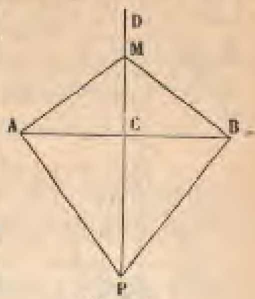

Fig. 26.

49. Remarque. Lorsque des points jouissent d'une propriété commune, on appelle *lieu géométrique*, ou simplement *lieu* de ces points, une ligne qui les contient tous, et dont tous les points jouissent de la même propriété.

Ainsi, en vertu du théorème précédent, la perpendiculaire élevée au milieu de la ligne AB contient tous les points équidistants des points A et B, et de plus, tous les points de cette perpendiculaire sont équidistants des points A et B. On pourra alors réunir les deux parties de ce théorème dans l'énoncé suivant :

La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est le lieu géométrique des points équidistants des deux extrémités de cette droite.

65. Théorème. *La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits* (fig. 43).

Soit ABC un triangle ; je prolonge le côté AC en CD, et je mène par le point C la ligne CE parallèle à AB. L'angle A du triangle est égal à DCE comme correspondants formés par les parallèles AB, CE coupées par la sécante AD ; l'angle B du triangle est égal à l'angle BCE comme alternes-internes formés par les parallèles BA, CE coupées par la sécante BC. Donc la somme des trois angles du triangle est égale à la somme des angles

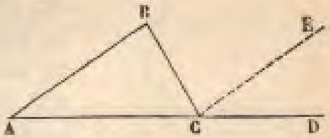

Fig. 43.

$$DCE + ECB + ACB,$$

et cette somme elle-même vaut deux droits (**22**) ; donc, etc.

Page 27

79. Théorème. *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent mutuellement en deux parties égales* (fig. 49).

Soient ABCD un parallélogramme, AC, BD ses diagonales qui se coupent en O ; je dis que $OA = OC$ et $OB = OD$. En effet, les deux triangles OAB, OCD ont le côté $AB = CD$ comme côtés opposés d'un parallélogramme (**72**), l'angle $OAB = OCD$ comme alternes-internes, et l'angle $OBA = ODC$ pour la même raison ; ces deux triangles sont donc égaux (**31**), et alors les côtés AO, CO, opposés aux angles égaux ABO, CDO, sont égaux ; de même $OB = OD$. c. q. f. d.

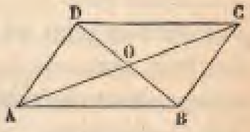

Fig. 49.

80. Théorème. *Les diagonales d'un losange* ABCD *sont perpendiculaires entre elles* (fig. 50).

Le losange ayant ses quatre côtés égaux, les points B et D sont l'un et l'autre à égale distance des points A et C ; donc ils appartiennent tous les deux à la perpendiculaire élevée au milieu de AC (**48**) ; par conséquent la droite BD est perpendiculaire à AC. c. q. f. d.

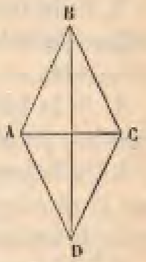

Fig. 50.

Page 31

81. Théorème. *Les diagonales d'un rectangle* ABCD *sont égales* (fig. 51).

En effet, les deux triangles rectangles ABC, BAD ont le côté AB commun et le côté BC égal à AD (**72**) ; ils ont donc un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, et par conséquent ils sont égaux (**32**) ; il en résulte que leurs hypoténuses AC et BD sont égales. c. q. f. d.

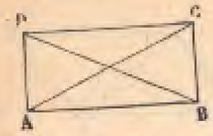

Fig. 51.

Remarque. Le carré est à la fois un losange et un rectangle ; *donc les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et égales entre elles.*

EXERCICES SUR LE LIVRE I[er]

THÉORÈMES A DÉMONTRER ET PROBLÈMES A RÉSOUDRE.

1. Si l'on joint un point pris dans l'intérieur d'un triangle aux trois sommets, la somme de ces lignes est moindre que la somme des trois côtés du triangle.

2. La ligne qui joint l'un des sommets d'un triangle au milieu du côté opposé (cette ligne s'appelle une *médiane* du triangle), est moindre que la demi-somme des deux autres côtés.

3. Si la ligne qui joint l'un des sommets d'un triangle au milieu du côté opposé est perpendiculaire à ce côté, le triangle est isocèle.

4. Si la bissectrice d'un angle d'un triangle est perpendiculaire sur le côté opposé, le triangle est isocèle.

5. Si la perpendiculaire abaissée d'un sommet d'un triangle sur le côté opposé partage ce côté en deux parties égales, le triangle est isocèle.

6. Si les perpendiculaires abaissées de deux sommets d'un triangle sur les côtés opposés sont égales entre elles, le triangle est isocèle.

7. Les perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés d'un triangle se coupent en un même point.

8. Les bissectrices des trois angles d'un triangle se coupent en un même point.

9. Deux points A et B et une droite MN étant donnés (fig. 52), trouver sur la droite MN un point C tel, que l'angle ACM soit égal à l'angle BCN. (Problème du billard.) Démontrer que la ligne brisée ACB ainsi déterminée est plus courte que toute autre ligne brisée obtenue en joignant un point de la ligne MN aux deux points A et B.

Fig. 52.

10. Deux parallèles étant données et deux points A et B situés hors de ces parallèles et de côtés différents, trouver le plus court chemin de A en B par une ligne brisée telle, que la portion comprise entre les deux parallèles ait une direction donnée.

11. Deux lignes parallèles étant données, si l'on mène une troisième ligne parallèle à égale distance des deux premières, elle divise en deux parties égales toutes les droites comprises entre les deux parallèles données.

12. Si par chacun des sommets d'un triangle on mène une parallèle au côté opposé, ces trois droites, suffisamment prolongées, forment un nouveau triangle, qui vaut le quadruple du premier triangle, et dont les côtés ont des longueurs doubles des côtés du premier.

13. Les perpendiculaires abaissées des trois sommets d'un triangle sur les côtés opposés se coupent en un même point.

14. Quel est le lieu géométrique des milieux des portions de droite menées d'un point fixe à une droite fixe?

15. Quelle est la valeur de l'angle d'un triangle équilatéral?

16. L'un des angles aigus d'un triangle rectangle est les $\frac{2}{3}$ d'un angle droit; quelle est la valeur de l'autre?

17. L'angle au sommet d'un triangle isocèle est les $\frac{6}{7}$ d'un angle droit; combien vaut chacun des angles à la base?

18. Chacun des angles à la base d'un triangle isocèle est égal à $\frac{3}{4}$ de droit; quelle est la valeur de l'angle au sommet?

19. La somme des angles d'un polygone convexe est égal à 94 angles droits; combien ce polygone a-t-il de côtés?

20. Si, dans un triangle, la ligne qui joint l'un des sommets au milieu du côté opposé est égale à la moitié de ce côté, le triangle est rectangle.

21. Si, dans un triangle rectangle, l'un des angles aigus est double de l'autre, l'hypoténuse est double du plus petit côté.

22. Si l'on prolonge dans le même sens tous les côtés d'un polygone convexe, la somme des angles extérieurs ainsi formés est égale à quatre angles droits.

23. Deux parallélogrammes sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.

24. Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent mutuellement en deux parties égales, ce quadrilatère est un parallélogramme.

25. Si, dans un quadrilatère, les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, et sont perpendiculaires, le quadrilatère est un losange.

26. Si, dans un quadrilatère, les diagonales sont égales et se coupent mutuellement en parties égales, le quadrilatère est un rectangle.

27. La ligne menée par le milieu d'un côté d'un triangle parallèlement à un autre côté passe par le milieu du troisième côté, et sa longueur est la moitié de celle du côté qui lui est parallèle.

28. Si l'on joint deux à deux les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe, on forme un nouveau quadrilatère qui est un parallélogramme; dans quel cas ce parallélogramme est-il un losange ou un rectangle?

29. Dans un trapèze, les milieux des côtés non parallèles et les milieux des diagonales sont quatre points en ligne droite.

30. Dans un trapèze isocèle, c'est-à-dire tel que les côtés non parallèles sont égaux entre eux, les angles opposés sont supplémentaires.

31. Quelles sont les propriétés du quadrilatère formé par les bissectrices des angles d'un parallélogramme, et du quadrilatère formé par les bissectrices des angles extérieurs? (Concours académique de Dijon, Troisième, 1866.)

32. Si dans un trapèze ABCD (le lecteur est prié de faire la

figure), dont les côtés parallèles sont AB et CD, on mène les bissectrices des angles A et D, sous quel angle se couperont-elles ? Quelle est la direction de la droite qui joint le point de rencontre des bissectrices des angles A et D au point de rencontre des bissectrices des angles B et C ? (Concours académique de Dijon, Troisième, 1868.)

33. La somme des distances d'un point quelconque pris sur la base d'un triangle isocèle aux deux autres côtés est constante. Comment faudrait-il modifier cet énoncé, si le point, au lieu d'être pris sur la base même du triangle, était pris sur le prolongement de cette base ?

34. Trouver le lieu géométrique des points tels, que la somme de leurs distances à deux droites données soit constante et égale à une longueur connue. (Concours général, Seconde, 1875.)