Baccalauréat C Groupe 1 septembre 1973

EXERCICE I

le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère la transformation ponctuelle T_α qui à tout point M$(x\,;\ y)$ associe le point M$'(x'\,;\ y')$ défini par

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' &=& 4\cos\alpha - x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha\\ y' &=& 4\sin\alpha - x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha\end{array}\right. \quad \alpha \in]-\pi\,;\,\pi].$$

Montrer que T_α est une symétrie axiale dont l'axe D_α reste tangent au cercle de centre O et de rayon 2, quand on fait varier le paramètre α.

EXERCICE II

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$; à tout point M de coordonnées x et y est associé son affixe $z = x + \mathrm{i}y$.

1. Le nombre réel k étant donné, résoudre par rapport à z l'équation

$$z\frac{3z-4}{3+4z} = k.$$

   On trouvera, dans le cas général, deux solutions z_1 et z_2 affixes de deux points M_1 et M_2.
   Montrer que les coordonnées des points M_1 et M_2 vérifient
   soit la relation $y = 0$,
   soit une relation $f(x\,;\ y) = 0$, indépendante de k, que l'on précisera.

2. En déduire l'ensemble des points M dont l'affixe donne à $z\dfrac{3z-4}{3+4z}$ une valeur réelle.

PROBLÈME

Partie A

Les trois inconnues x, y, z étant à valeurs réelles positives ou nulles, on considère le système de deux équations

$$1\quad \left\{\begin{array}{l c l}x^2+y^2+z^2 &=& 2m\\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 &=& m^2\end{array}\right. \quad 0 < m.$$

1. Démontrer que toute solution $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ satisfait nécessairement aux conditions

$$x_0 \leqslant 2\sqrt{\frac{m}{3}},\quad y_0 \leqslant 2\sqrt{\frac{m}{3}},\quad z_0 \leqslant 2\sqrt{\frac{m}{3}}$$

   Pour obtenir ces conditions, on pourra par exemple donner à z une valeur arbitraire z_0 et résoudre le système par rapport à x et y en discutant l'existence des solutions suivant la valeur z_0.

   Calculer x et y, lorsqu'on donne à z la valeur $2\sqrt{\dfrac{m}{3}}$.

2. Démontrer que l'égalité suivante est vraie quels a, b, c :

$$a^4+b^4+c^4-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) = (a+b+c)(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c).$$

   En déduire des relations du premier degré indépendantes de m telles que, pour toute solution $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ du système 1, les trois nombres x_0, y_0, z_0 satisfont nécessairement à l'une d'entre elles.

Partie B

On désigne par f, g, h trois fonctions numériques, qui à tout nombre réel x associent respectivement

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sqrt{2(1-\cos x)}, \\ g(x) & = & \sqrt{2+\cos x-\sqrt{3}\sin x}, \\ h(x) & = & \sqrt{2+\cos x+\sqrt{3}\sin x}. \end{array}$$

1. Comparer $g\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $h\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ à $f(x)$.

Etudier les sens de variation de f, g, h et construire dans le même système d'axes les courbes représentatives, lorsque x varie de 0 à 2π.

2. Démontrer que $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ satisfont, quel que soit x, aux égalités

$$\left\{\begin{array}{lcl} f^2(x)+g^2(x)+h^2(x) & = & 6, \\ f^2(x)g^2(x)+g^2(x)h^2(x)+h^2(x)f^2(x) & = & 9. \end{array}\right.$$

3. Soit ABC le triangle équilatéral déterminé dans un repère orthonormé du plan affine euclidien par les points

$$\mathrm{A}(R\,;\,0),\quad \mathrm{B}\left(-\frac{R}{2}\,;\,R\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{C}\left(-\frac{R}{2}\,;\,-R\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad R>0$$

Déduire de l'étude précédente que, si M est un point du cercle circonscrit à ABC, il existe entre les distances MA $=\alpha$, MB $=\beta$, MC $=\gamma$ de M aux trois sommets
une relation de la forme

$$p\alpha+q\beta+r\gamma=0,$$

où p, q, r sont des entiers relatifs que l'on précisera suivant la position de M.