∽ Baccalauréat C Groupe I juin 1973 ∾

EXERCICE 1

On considère les entiers naturels n vérifiant la condition : n est le produit de trois naturels premiers a, b, c ($a < b < c$), dont l'un est la somme des deux autres; par exemple 286 est un tel nombre $286 = 2 \times 11 \times 13$.

1. Déterminer a; encadrer b de sorte que

$$N_1 \leqslant n < N_2,$$

   N_1 et N_2 étant deux naturels donnés.
2. En déduire les naturels n pour lesquels

$$N_1 = 6 \cdot 10^4 \quad \text{et} \quad N_2 = 8 \cdot 10^4.$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par :

$$x \in \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto f(x) = x - 2 + (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

et soit (C) sa courbe représentative (repère orthonormé, unité 1 cm).

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$; noter dans un même tableau de signe de f'', puis le sens de variation de f' et son signe, enfin le sens de variation de f et ses valeurs aux limites.
2. Tracer (C), donner sans calcul son asymptote (Δ).
   Soit λ un réel positif; (Δ), (C) et la droite d'équation $x = \lambda$ limitent une région fermée du plan, dont on calculera l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$.
   Trouver la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$, pour λ infini.

PROBLÈME

Un espace vectoriel euclidien orienté $\mathscr{E}$ est rapporté à la base orthonormée directe $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
R_1, R_2, R_3 sont des rotations vectorielles, dont les axes respectifs ont pour vecteurs unitaires $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ et dont l'angle commun a une mesure donnée α (radians).
On pose $R = R_3 \circ R_2 \circ R_1$.

1. Soit $\overrightarrow{V}(x\,;\ y\,;\ z)$ un vecteur de $\mathscr{E}$; calculer les coordonnées de

$$R_1\left(\overrightarrow{V}\right), \quad R_2\left(\overrightarrow{V}\right), \quad R_3\left(\overrightarrow{V}\right), \quad R_1^{-1}\left(\overrightarrow{V}\right);$$

   le calcul des coordonnées de $R\left(\overrightarrow{V}\right)$ est exclu.
   Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{A} = R_1^{-1}\left(\vec{\jmath}\right)$ et de $\overrightarrow{A'} = R\left(\overrightarrow{A}\right)$.
   En déduire les cas où R est l'identité de $\mathscr{E}$; ces cas dorénavant écartés, R est une rotation vectorielle déterminée.
2. On pose $u = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}$; soit $\overrightarrow{\Omega}(\cos u\,;\ \sin u\,;\ \cos u)$, vérifier que

$$R\left(\overrightarrow{\Omega}\right) = \overrightarrow{\Omega}.$$

   L'axe de R porte Ω, on l'oriente dans le sens de Ω; l'angle de R ayant alors pour mesure φ, ce qui suit vise à calculer φ en utilisant $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{A'}$.
   Reconnaître d'abord $\overrightarrow{\Omega}$ et φ pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, puis pour $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$.

3. Calculer en fonction de u les coordonnées de $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{A'}$, puis celles des produits vectoriels $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{A'}$.
Vérifier que $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{B'}$ sont unitaires.
$\left(\overrightarrow{\Omega}, \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\right)$ est une base de $\mathscr{E}$, étudier sans calcul sa transformée par R, conclure à l'égalité $\overrightarrow{B'} = R\left(\overrightarrow{B}\right)$.
Établir les formules

$$\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B'} = \cos^2 u\left(3 - 4\cos^4 u\right), \quad \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{B'} = \overrightarrow{\Omega} \sin u\left(1 - 4\cos^4 u\right).$$

4. Déduire des formules précédentes $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$.
On définit v par $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\cos v = \cos^2 u$, $\sin u \cdot \sin v \geqslant 0$; démontrer la relation $\varphi = 3v + \pi\ [2\pi]$.
On change α en $\alpha + 2\pi$; en quoi $\overrightarrow{\Omega}$ et φ sont-ils changés ?
Trouver l'ensemble des valeurs de α qui donnent $\varphi = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, puis sans nouveau calcul $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$; on posera

$$\sqrt{3} - 1 = \sin\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\ (\theta \approx 0{,}821\,133.$$