Un sujet de TP sur ordinateur utilisant le calcul formel

Fabrice Lallemand(*)

1. Introduction.

Lors des journées nationales de Clermont-Ferrand, M. MOISAN, Inspecteur Général de mathématiques, a détaillé les principes d'une nouvelle épreuve pratique de mathématiques au bac S. Ces informations sont détaillées sur le site de l'APMEP, www.apmep.asso.fr, rubrique « Commissions & groupes de travail », « Lycée », puis « Actualités ».

Les sujets expérimentaux qui ont été publiés sont pour la plupart basés sur la même démarche, souvent rencontrée quand il s'agit d'utiliser l'ordinateur en mathématiques : observation (ou simulation), conjecture, démonstration. Le candidat est amené à utiliser un logiciel de géométrie dynamique ou un tableur pour représenter une configuration ou effectuer une simulation ou un calcul particulier. L'aspect « dynamique » du logiciel permet d'observer un invariant, de conjecturer une limite ou un lieu de points. On quitte alors le plus souvent le clavier et la souris pour démontrer ce qui a été observé (en suivant éventuellement des questions intermédiaires) sur papier. Cette démarche est celle qui est couramment observée dans les travaux pratiques utilisant l'ordinateur présents dans les manuels scolaires et dans de nombreuses brochures.

L'objectif de cet article est d'essayer de montrer un type de problème à résoudre avec l'ordinateur qui, à mon avis, donnerait du sens à cette nouvelle épreuve. Le sujet qui suit est destiné à une classe de première, car j'ai recherché des sujets permettant de préparer les élèves de première à la nouvelle épreuve (la préparation ne pourra pas se faire sur la seule année de terminale). Il peut être donné en série S ou en série STI ou STL. Il suppose que les élèves savent déjà utiliser le logiciel Xcas [1], mais une fiche regroupant les principales commandes du logiciel est distribuée avec l'énoncé. Le but recherché n'est pas, en effet, de faire des élèves des spécialistes de l'utilisation de tel ou tel logiciel, mais de leur faire faire des mathématiques ! Je reproduis ci-dessous l'énoncé distribué aux élèves.

2. Une petite activité autour de la notion de tangente et de dérivée [2].

Énoncé élèves :

L'objet de ce TP est de découvrir et de démontrer dans le cas général, à l'aide de Xcas, une propriété des courbes représentatives d'une fonction polynôme du troisième degré, sous certaines conditions.

1. Étude d'un cas particulier

Démarrer le logiciel Xcas et ouvrir une fenêtre de géométrie 2D.

(*) Lycée Jean Monnet, Aurillac.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - x + 2$, définie sur $\mathbb{R}$.

a. À l'aide du logiciel, résoudre l'équation $f(x) = 0$. On note a, b et c ses trois solutions, avec $a < b < c$.

b. Tracer à l'écran la courbe représentative C_f de f sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.

c. On note A, B et C les points de l'axe des abscisses d'abscisses respectives a, b et c.
Placer les points A, B et C.
Placer le point I, de la courbe C_f, dont l'abscisse est celle du milieu du segment [AB], le point J dont l'abscisse est celle du milieu du segment [AC] et le point K dont l'abscisse est celle du milieu du segment [BC].

d. Tracer les tangentes à la courbe C_f en I, J et K (on pourra utiliser trois couleurs différentes).
Que constatez-vous ? Rédiger une conjecture.

2. Étude du cas général

On se donne trois réels a, b et c quelconques. Soit $f : x \mapsto (x - a)(x - b)(x - c)$, définie sur $\mathbb{R}$. On note C_f la courbe représentative de f et A, B, C, I, J et K les points définis comme à la première partie.

a. Ouvrir une nouvelle session de Xcas et ajouter un écran de géométrie 2D.
Définir les trois réels a, b et c comme des paramètres variables de -5 à 5, en choisissant pour le dessin les mêmes valeurs qu'à la première partie.
Tracer la courbe C_f et les tangentes en I, J et K.
Faire varier a, b et c à l'aide des curseurs. La conjecture émise dans la première partie reste-t-elle valable ?

b. **i**. En utilisant la commande convenable, vérifier que le point C appartient à la tangente à C_f en I.
Le but des questions suivantes est de prouver ce résultat par le calcul, en utilisant le logiciel.
ii. Sans faire de calcul, décrire la marche à suivre pour prouver que le point C appartient à la tangente en I.
iii. Rédiger cette démonstration, en faisant faire à Xcas tous les calculs nécessaires.

Ce qui diffère d'un sujet classique, dans ce sujet, est la partie « démonstration ». Elle se fait ici avec le logiciel. Ses possibilités de calcul formel permettent en effet de se passer des calculs et de les faire faire par l'ordinateur. On ne peut pas pour autant reprocher à cet exercice d'être un problème d'informatique (savoir utiliser un logiciel) plutôt qu'un problème de mathématiques. C'est bien, en effet, une activité mathématique essentielle que de se demander quel outil utiliser, parmi une liste connue, pour résoudre un problème donné, de savoir élaborer une démarche, une stratégie permettant de résoudre une problème donné. Savoir ensuite effectuer, d'un point de vue technique, les calculs et les résolutions d'équations nécessaires est une autre affaire, tout aussi importante, mais bien distincte. On teste donc dans ce travail :

- La capacité à choisir un outil adapté.
- La capacité à élaborer une stratégie de résolution.
- Les connaissances sur le lien entre tangentes à une courbe et dérivée.

On ne vérifie pas, par contre, la capacité des élèves à calculer une dérivée, déterminer à la main une équation d'une tangente, etc. Ces points sont travaillés dans d'autres situations. L'utilisation du logiciel permet en outre ici de faire la démonstration générale de la propriété observée dans la première partie, ce qui serait fastidieux (autant dire hors de portée) à la main. Les élèves ne font pas les calculs eux-mêmes, mais doivent comprendre et interpréter les résultats. L'activité n'est pas mathématiquement vide.

On a donc une double justification de l'utilisation de l'ordinateur. Elle permet, dans la phase d'observation et de conjecture d'avoir une vision graphique dynamique de la situation et donc de visualiser un grand nombre de cas. Ensuite, le logiciel offre la possibilité de faire tous les calculs nécessaires à la démonstration dans le cas général (grâce aux possibilités de calcul formel).

Le niveau de l'exercice n'est peut-être pas très élevé pour des élèves de première S. C'est volontaire, car d'une part l'exercice doit être traité en une séance de 55 minutes et d'autre part, je l'ai testé avec des élèves de première STI dont j'ai la charge cette année.

3. Déroulement de la séance.

Première partie : l'étude d'un cas particulier permet aux élèves d'appréhender concrètement la situation. La construction de la figure ne prend pas beaucoup de temps, mais les élèves peinent ensuite à formuler correctement la conjecture. Aucune démonstration n'est demandée à cette étape.

Deuxième partie : la question (a) consiste à refaire la figure en utilisant des paramètres formels a, b et c, racines de l'équation $f(x) = 0$. On observe alors, en faisant varier les réels a, b et c, que la conjecture émise dans la première partie reste valable. Dans la question 2b, on commence par valider la conjecture en utilisant la commande « est-element(…) », qui retourne 1. Cela signifie que le point C est bien sur la tangente en I à la courbe. Cependant, cette vérification se fait en aveugle, et la question suivante demande explicitement à l'élève de décrire la démarche permettant de prouver par le calcul cette propriété, tout en faisant les calculs avec le logiciel. La démarche attendue est la suivante :

- Calculer la fonction dérivée f' de f ;
- Déterminer, sous la forme la plus simple possible, une équation de la tangente à la courbe C_f en I ;
- Rechercher l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses en résolvant une équation.

En fin de séance, les élèves doivent remettre une copie rendant compte de leur démarche et des résultats obtenus aux différentes étapes à l'aide du logiciel. Pour déterminer une équation de la tangente, certains élèves ont pensé à utiliser la fonction « equation » du logiciel. Dans ce cas, j'ai explicitement demandé de recourir à une autre méthode pour obtenir l'équation, cette fonction ayant alors servi de vérification du résultat obtenu.

4. Au sujet des logiciels utilisés en mathématiques.

Je souhaiterais dire deux mots des logiciels. Je trouve anormale l’utilisation quasi-exclusive de logiciels commerciaux dans l’éducation nationale. Nos crédits d’enseignement pourraient avoir d’autres objectifs, d’autant qu’il existe des logiciels libres, donc gratuits, de qualité. Pour cette épreuve pratique, on pourrait par exemple utiliser le tableur de la suite OpenOffice dont les fonctionnalités sont les mêmes que celles du tableur d’une grande société bien connue. En géométrie plane dynamique, j’utilise GeoGebra, développé par un collègue autrichien mais tout en français, dont l’ergonomie est remarquable et qui possède en plus quelques possibilités algébriques intéressantes (voir un article récent au sujet de GeoGebra dans PLOT). Le troisième type de logiciel qui me semble indispensable est un logiciel de calcul formel. Il s’agit du logiciel Xcas (utilisé dans le sujet ci-dessus) qui a fait récemment l’objet d’un article dans le bulletin vert [1]. Il a la particularité de regrouper géométrie dynamique dans le plan, dans l’espace, tableur et calcul formel, ce qui fait qu’on pourrait, à la rigueur se satisfaire uniquement de lui ! Malheureusement, l’ergonomie n’est pas aussi développée que celle de GeoGebra par exemple, et Xcas demande un peu d’apprentissage. C’est la rançon de l’omnipotence ! Il manque à cette liste un logiciel de géométrie dynamique dans l’espace (quoique Xcas en soit un aussi…). Je n’en connais pas de libre et j’utilise donc encore Géospace qui, bien qu’étant un produit de l’éducation nationale, n’est pas un logiciel libre.

5. En guise de conclusion.

L’énoncé ci-dessus n’a pas la prétention d’être un modèle du genre ni d’être particulièrement original. J’ai juste voulu montrer que, quitte à utiliser l’ordinateur, on peut le faire jusqu’au bout, c’est-à-dire jusqu’à en faire un instrument de démonstration. Ce sont les logiciels de calcul formel qui le permettent. On ne peut pas dire que ce ne sont pas des mathématiques, à moins de les considérer uniquement comme une discipline purement technique et calculatoire, ce qu’elles ne sont pas. Avec un tel outil, si l’énoncé est posé de façon à rendre ce travail possible, en évitant une suite de question fermées où il n’est plus qu’un exécutant, l’élève peut construire un raisonnement, voire comprendre une méthode exposée en cours, sans être arrêté par l’aspect technique des calculs (certains de mes élèves de TS oublient couramment l’effet d’un signe « – » devant une parenthèse … quand ce ne sont pas les parenthèses elles mêmes qui passent à la trappe). Ce type d’activité n'exclut pas l’entraînement aux techniques de calcul, mais lui est complémentaire. J’ajoute enfin qu’il faut du temps pour y préparer les élèves et que nous en manquons cruellement en série S.

Références

[1] Bulletin vert n° 468, Janvier-Février 2007, p. 82 à 90.
[2] Revue 3’33 CASIO n° 54 septembre 2006, http://www.cas-calcul.com/enseignants/revue_activites/revue3-33/classpad_math.htm
[3] http://fr.openoffice.org
[4] www.geogebra.at