Âryabhata et la table des sinus

Jean Lefort

L’écriture des nombres chez Âryabhata et ses contemporains

Âryabhata, né en 476 de notre ère, a écrit l’essentiel de ses textes entre 499 et 550, date de son décès. Il vécu dans la ville de Pâtaliputra (la citée des fleurs, aujourd’hui Patna dans le Bihar), ancienne capitale des premiers monarques de l’Inde. C’est en 499 qu’il rédige ce qui nous est parvenu sous le nom d’Âryabhatîyam. Ce texte est composé de 4 chapitres, tous écrits en vers sous forme de distiques, à savoir :

1) *Harmonies célestes* qui est un recueil de tables numériques (13 distiques).
2) *Éléments de calcul* (33 distiques).
3) *Du temps et de sa mesure* (25 distiques).
4) *Des sphères* (50 distiques).

Dans cet ouvrage, Âryabhata utilise différents types de numération. Il y a bien sûr l’écriture des nombres en toutes lettres, reflet de l’expression orale tout à fait voisine de celle que nous utilisons. Il y a ensuite une numération alphabétique inventée par Âryabhata lui-même qui donne aux 25 consonnes du sanskrit une valeur de 1 à 25 puis aux semi-voyelles, sifflantes et aspirées, les valeurs des dizaines de 30 à 100. Cette numération est améliorée pour écrire les grands nombres grâce à un jeu sur les voyelles qui permet la multiplication par des puissances de 10. Enfin un certain nombre d’algorithmes, comme l’extraction des racines carrées ou cubiques, implique une écriture décimale de position sans que l’on sache si elle faisait référence à une table à compter auquel cas le zéro ne renvoyait qu’à une case vide ou s’il existait déjà une numération de position de base dix faisant intervenir un zéro opérateur. Le lecteur sait la fortune qu’aura cette invention puisque c’est exactement le principe de notre écriture des nombres avec les chiffres dits arabes mais que les arabes appellent fort justement « figures indiennes ».

Il faut tenir compte d’une spécificité indienne qui perdure en poésie : Remplacer les nombres par des mots qui, dans l’esprit des gens, ont une forte connotation numérique. Voici quelques exemples de ce procédé métonymique :

Deux : tout ce qui va par deux comme les yeux, les bras, les ailes ou les jumeaux, …
Cinq : les sens (les 5 sens) ou les visages de Siva (au nombre de 5), …
Douze : Le Soleil.
Zéro : Le vide, l’espace, l’atmosphère, …

(*) jlefort.apmep@wanadoo.fr

Remarquons que les indiens utilisent des mots traduisant des nombres supérieurs ou égaux à dix, même si l'usage de ces mots est moins courant. Toutefois l'écriture décimale est toujours sous-jacente. Ainsi le nombre 1 986 123 730 est écrit, en commençant par les unités comme c'est l'habitude dans cette civilisation :

espace-feu-montagnes-Râma-Soleil-saveurs-Vasu-orifices-Lune[1]

0 3 7 3 12 6 8 9 1

Or les « théorèmes » d'Âryabhata sont systématiquement écrits en vers, en général sous forme de distiques. Cela les rend parfois assez obscurs, mais il faut plutôt les voir comme moyens mnémoniques qu'éclairent les leçons du maîtres ou les commentateurs ultérieurs. Parmi ces commentateurs, citons Bhâskhara I (fin du VIe siècle, début du VIIe) et Brahmagupta (598 – 668).

La table des sinus

Avant de parler des sinus, rappelons la valeur de π utilisée par les savants indiens. On la trouve au verset X du deuxième chapitre de l'Âryabhatîyam, énoncée sous la forme opératoire (avec des nombres en toutes lettres) :

X – Ajoutez 4 à 100, multipliez par 8, ajoutez encore 6 200, voilà pour un diamètre de deux myriades (20 000) la valeur approximative de la circonférence du cercle.

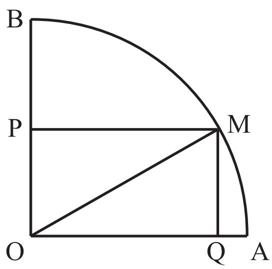
On vérifiera que cela donne pour π la valeur approchée 3,1416. Mais il est bien précisé qu'il s'agit d'une valeur approximative. Peut-être même pensait-il que π était irrationnel.

La table des sinus proprement dite se trouve dans le premier chapitre, au verset XII. C'est a priori assez sibyllin puisqu'on y lit, dans la numération alphabétique inventée par Âryabhata, la succession de nombres suivants[2] :

XII – 225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 191, 183, 174, 164, 154, 143, 131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22, 7.

Avant d'en expliquer le sens, voyons la définition même des sinus qui est donnée au verset XI du chapitre 2 :

XI a – Divisez en parties égales le quart de la circonférence, au moyen d'un triangle et d'un rectangle vous aurez sur le rayon toutes les demi-cordes d'arcs que vous voudrez.



Le mot pour « demi-corde » est « *jyâ-ardha* » (mot à mot « corde-demi »), qui sera réduit à « *jyâ* » ou « *jyva* » puis repris et adapté par les arabes sous la forme « *jîba* » qui sera confondu avec le mot « *jîb* » (qui a le sens de « poche ») par les traducteurs européens qui utilisaient le latin comme langue savante, d'où le terme « sinus » qui veut bien dire « poche » en latin.

---

(1) Il y a 3 feux védiques, 3 divinités Râma, 6 saveurs principales, 7 montagnes sacrées, 8 petites divinités Vasu, 9 orifices dans le corps humain.

(2) Je me suis largement inspiré des commentaires et j'ai utilisé la traduction de Léon Rodet : *Leçons de calcul d'Âryabhata*, Paris 1879.

Le texte n'est qu'une façon de construire une table des sinus d'un arc (ou d'un angle). On divise l'arc AB en parts égales (par exemple en 24 parties). Si M est un des points de subdivision, le triangle dont il s'agit est le triangle mixtiligne OAM et le rectangle OPMQ permet la projection sur les axes de coordonnées. On lit le sinus en OP. C'est bien la définition géométrique habituelle du sinus.

La deuxième partie du verset suivant éclaire un peu mieux la table des sinus. En effet, il est écrit :

XII b – Les différences sont diminuées des quotients successifs des sinus par le premier sinus.

Nous reviendrons sur cette phrase un peu plus loin, mais nous comprenons d'ores et déjà qu'il ne s'agit pas à proprement parler d'une table des sinus, mais d'une table des différences des sinus. Reconstruisons alors cette table en partant de 0 puisque nous savons que sin(0) = 0. Comme il y a 24 nombres cela signifie qu'Âryabhata a divisé le quart de la circonférence en 24 parties, chacune d'entre elles faisant donc 3° 45' (ou 3,75°). Nous obtenons ainsi :

arcs	sinus	diff.	arcs	sinus	diff.	arcs	sinus	diff.
0°	0		30°	1719		60°	2978	
		225			191			106
3° 45'	225		33° 45'	1910		63° 45'	3084	
		224			183			93
7° 30'	449		37° 30'	2093		67° 30'	3177	
		222			174			79
11° 15'	671		41° 15'	2267		71° 15'	3256	
		219			164			65
15°	890		45°	2431		75°	3321	
		215			154			51
18° 45'	1105		48° 45'	2585		78° 45'	3372	
		210			143			37
22° 30'	1315		52° 30'	2728		82° 30'	3409	
		205			131			22
26° 15'	1520		56° 15'	2859		86° 15'	3431	
		199			119			7
30°	1719		60°	2978		90°	3438	

On s'étonnera de voir que sin(90°) vaut 3438 et non pas 1 ! En fait ce n'est que tardivement qu'on se ramènera au cercle unité ; Âryabhata a utilisé ici un cercle de rayon R = 3438 et a établi une table des différences des R-sinus. Ce nombre de 3438 n'est pas pris au hasard. On peut remarquer que la première différence est également le premier sinus et par suite sin(3° 45') = sin(225') = 225. Âryabhata identifie le sinus avec l'arc quand l'arc est petit. Mais l'unité est la minute d'angle et non pas le radian, or 3438 est la mesure approchée (par excès) de la valeur en minutes d'un angle d'un radian. De nombreux successeurs d'Âryabhata feront de même en partant d'angles de plus en plus petits pour construire des tables plus précises.

Il n'est pas difficile de vérifier que les valeurs obtenues pour les sinus sont précises à une unité près au plus. Comme Âryabhata travaille avec des entiers, il ne pouvait pas faire mieux.

Revenons au verset XII du deuxième chapitre. Le premier vers, très obscur, est sans doute, selon Léon Rodet, un cas particulier de ce que dit le deuxième vers.

XII b – Les différences sont diminuées des quotients successifs des sinus par le premier sinus.
Si on note S_n (en commençant à 0) le n-ième sinus donné par la table ci-dessus, la formule peut s'écrire en langage algébrique sous la forme :

$$S_{n+1}-S_n=S_n-S_{n-1}-\frac{S_n}{225}.$$

Ceci correspond sensiblement à un développement limité à l'ordre 2 de la fonction sinus au voisinage de la valeur x. En effet, on a :

$$\sin(x+h)-2\sin(x)+\sin(x-h)\approx -h^2\sin(x)$$

(la formule est exacte à $o(h^3)$ près). Ici, on prend $h=3°45'=225'=\frac{3,75\pi}{180}\text{rd}$, d'où :

$$(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=-\left(\frac{3,75\pi}{180}\right)^2 S_n.$$

Cela revient à assimiler $\left(\frac{3,75\pi}{180}\right)^2$ avec $\frac{1}{225}$ ou encore π avec 3,2.On vérifiera qu'aux arrondis près, l'énoncé est correct.
Il est certain qu'Âryabhata a obtenu ce résultat de façon pragmatique en observant attentivement sa table et non pas en faisant un développement limité, tout à fait anachronique, comme nous venons de le faire. En effet, le résultat dépend de l'unité utilisé. Pour obtenir un résultat analogue avec une table donnant les sinus de degré en degré, il aurait dû utiliser un cercle de rayon 188 105 qui ne correspond à rien de bien évident. À titre de comparaison, le radian contient 206 265''.
D'une façon générale, si k est le facteur multiplicatif du sinus, c'est-à-dire le rayon du cercle de référence et si h est le pas de la table (en radians), pour que la règle donnée par Âryabhata soit juste il faut que $h^2 k\sin x\approx\frac{k\sin x}{k\sin h}$ soit $k\approx\frac{1}{h^2\sin h}\approx\frac{1}{h^3}$.
Âryabhata a eu beaucoup de chance en choisissant de construire une table de 3° 45' en 3° 45'. Cette valeur résultant d'une succession de division par 2 d'un angle de 60° qu'il est très facile de construire.

La postérité du sinus

Il faut rendre à César ce qui lui appartient. C'est aux mathématiciens indiens en général et, sans doute, à Âryabhata en particulier que l'on doit l'invention du sinus ou plus exactement du R-sinus. Nous avons vu que les énoncés d'Âryabhata ne sont pas toujours très limpides, versification oblige, et que l'absence de démonstration est aussi un handicap. Il faut donc attendre les commentateurs pour mieux comprendre l'apport de cet auteur.

Parmi les commentateurs les plus célèbres, citons Bhâskara I (fin du VI^e, début du VII^e s.) qui dans son ouvrage en 8 chapitres, le Mahabhaskariya, va approfondir le travail d'Âryabhata en donnant les règles de calcul selon la numération décimale, en précisant les tables de trigonométrie. En particulier, dans le 7^e chapitre, il va donner une règle de calcul des sinus au moyen d'une formule que nous écririons aujourd'hui sous la forme $\sin x \approx \dfrac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}$. Cette formule est précise à 1,5 10^{-3} près. Il donne également les notions de cosinus, sinus verse (c'est-à-dire 1 – cosinus) et cosécante (c'est-à-dire 1/sinus) qu'il attribue à Âryabhata.
Au VII^e siècle, l'astronome Lalla donne une table des R-sinus (et non pas des différences) qui commence par :

Les sinus sont dans l'ordre :	
flèches (5), yeux (2), bras (2),	225
neuf (9), océans (4), védas (4),	449
terre (1), montagnes (7), saisons (6),	671
ciel (0), constellations (9), serpents (8),	890
flèches (5), vide (0), Shiva (1),	1105
flèches (5), lune (1), mondes (3),	1315
ongles (20), flèches (5), terre (1),	1520
neuf (9), lune (1), sept (7), sol (1),	1719…

Mais le document le plus important est écrit en 628 par Brahmagupta. Il s'agit d'un traité qui reprend en les approfondissant les travaux de ses prédécesseurs, le Brahmasphuta-Siddhanta qui est avant tout un ouvrage d'astronomie et de mathématiques appliquées avec une table des sinus de quart de degré en quart de degré. C'est sans doute cet ouvrage qu'un ambassadeur indien offrit en cadeau au calife Al-Mansûr en 773. Le calife demanda à Al-Fazzârî de le traduire pour le plus grand profit des musulmans. C'est sous le titre de Al-Zij al-Sindhind al-kabir (Grand traité du Sindhind, ce mot étant la translittération de Siddhanta qui signifie « canon astronomique ») que les arabes de Bagdad prirent connaissance de la puissance de la numération décimale qu'ils adoptèrent rapidement sous le nom de « figures indiennes » et de la notion de sinus qu'ils translittérèrent en jîba.
Ce sont les arabes qui vont largement développer le calcul trigonométrique, en particulier Habash Al-Hasib (Habash le calculateur) va créer la notion de tangente sous le nom « d'ombre » (celle du gnomon). Son travail passera inaperçu pendant près d'un siècle avant d'être repris et développé. Puis Abul-Wafa (940 – 998) et Al-Biruni (973 – 1048) auront l'idée d'utiliser un cercle de rayon unité, définissant ainsi le sinus comme nous le faisons aujourd'hui en collège ou au lycée.
C'est toutefois Euler qui inventera les fonctions trigonométriques en les dégageant de leur définition géométrique.

Pour en revenir à Âryabhata, on peut se demander comment il a eu l'idée d'inventer le sinus alors que ses prédécesseurs, en particulier les mathématiciens grecs, travaillaient uniquement avec les cordes. Or il est clair que les tables des sinus sont copiées des tables des cordes grecques, par exemple celle de Ptolémée. En fait dans de très nombreux problèmes on voit apparaître des expressions telles que « *la corde de l'angle double* ». Il en est ainsi, tout simplement, quand on veut lier un côté de l'angle droit à l'angle opposé dans un triangle rectangle. Ailleurs, Ptolémée énonce un théorème où il fait intervenir les cordes qui sous-tendent le double de tel ou tel arc. D'où finalement l'idée de créer une table qui donne directement la moitié de la corde de l'angle double. Une idée pleine d'avenir.

Sources

Léon Rodet : *Leçons de calcul d'Âryabhata*, Paris 1879. (Consultable sur le site de la BNF http://gallica.bnf.fr/).

Geneviève Guitel : *Histoire comparée des numérations écrites*, CNRS-Flammarion 1975.

Georges Ifrah : *Histoire universelle des chiffres,* Seghers 1981.

Catherine Morice-Singh, *Histoire de la numération et de l'arithmétique indiennes des origines au XIIe siècle*, in Actes du colloque de novembre 1997, L'océan indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes. (Consultable sur le site de l'IUFM de la Réunion http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/Resources/MSingh34.pdf).