Baccalauréat C Madagascar juin 1973

Le candidat aura à traiter 4 *des* 8 *exercices proposés.*

EXERCICE 1

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathscr{E}_3$ rapporté à la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère l'endomorphisme f, qui, à tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ associe $\overrightarrow{v'}\ \left(x'\,;\,y'\,;\,z'\right)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c r}
x' & = & -\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{6}}{4}y+\frac{\sqrt{6}}{4}z,\\
y' & = & \frac{\sqrt{6}}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}z,\\
z' & = & -\frac{\sqrt{6}}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}z.
\end{array}\right.$$

1. Établir que f est une isométrie.
2. Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par f est une droite vectorielle (Δ).
3. Déterminer une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{\imath_1}, \overrightarrow{\jmath_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$ de $\mathscr{E}_3$ telle que $\overrightarrow{\jmath_1} \in (\Delta)$.

   En déduire la matrice de la restriction de f au plan vectoriel Π engendré par $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{\imath_1}$ matrice rapportée à la base $\left(\overrightarrow{k_1}, \overrightarrow{\imath_1}\right)$, base directe de Π.
   Quel est l'angle de f ?

EXERCICE 2

Soit n un nombre entier naturel premier, strictement supérieur à 2.
Soit $\dot{a}$ la classe de congruence modulo n de l'entier a, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'entiers modulo n.

1. On considère l'équation

$$(E):\quad x^2=\dot{a}.$$

   Montrer que si $a=0$, l'équation admet une solution, et une seule, et que si a est un carré parfait de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'équation admet deux solutions.
2. On suppose $\dot{a}\neq\dot{0}$. Montrer que a possède un inverse a' pour la multiplication de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
   On considère l'équation (E') :

$$\dot{a}x^2+\dot{b}x+\dot{c}=\dot{0}.$$

   a. Montrer que l'égalité $\dot{2}\dot{p}=\dot{b}\dot{a}'$ définit une classe unique, $\dot{p}$.
   b. Montrer que (E') admet au moins une solution si, et seulement si, on a

$$\dot{p}^2-\dot{a}'\dot{c} \text{ est un carré parfait.}$$

3. On suppose $n=7$ et l'on considère l'équation

$$(E'')\qquad \dot{5}x^2+\dot{3}x+\dot{2}=\dot{0}.$$

   a. Quels sont les carrés parfaits de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
   b. Calculer $\dot{a}'$ et $\dot{p}$, puis $\dot{p}^2-\dot{a}'\dot{c}$.
   c. En déduire les solutions de (E'').

EXERCICE 3

On se propose de résoudre sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation en z :

$$(1)\quad z^4-4(\cos a.\cos b)z^3+2(1+\cos 2a+\cos 2b)z^2-4(\cos a.\cos b)z+1=0,$$

où a et b sont deux nombres réels donnés.

1. Montrer que, en posant $z+\dfrac{1}{z}=u$, on peut ramener la résolution de l'équation (1) à celle de deux équations du second degré.
2. Résoudre l'équation (1) en donnant, en fonction de a et b, la forme trigonométrique de ses racines et placer les images des racines dans le plan complexe.

EXERCICE 4

Soit $\mathscr{A}=(\mathscr{E}_3,\,\mathscr{V}_3)$ un espace affine de dimension 3. Soit $r=\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$un repère cartésien de $\mathscr{A}$.
On donne $\overrightarrow{I}=\overrightarrow{\imath}-\overrightarrow{k},\,\overrightarrow{I}=\overrightarrow{\jmath}-\overrightarrow{k},\overrightarrow{K}=\overrightarrow{\imath}+\overrightarrow{\jmath}+\overrightarrow{k}$.

1. Montrer que $\left(\overrightarrow{I},\,\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$ est une base de $\mathscr{V}_3$.
2. Soit M un point de $\mathscr{E}_3$ de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans le repère r et de coordonnées $(X\,;\,Y\,;\,Z)$ dans le repère $R=\left(\text{O},\overrightarrow{I},\,\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$.
   L'application f de $\mathscr{E}_3$ dans $\mathscr{E}_3$ associe à M le point M$'$ dont les coordonnées cartésiennes sont $(x'\,;\,y'\,;\,z')$ relativement à r et $\left(X'\,;\,Y'\,;\,Z'\right)$ relativement à R, telles que
   $$x'=\frac{x-2y-2z}{3},\quad y'=\frac{-2x+y-2z}{3},\quad z'=\frac{-2x-2y-+z}{3}$$
   Calculer x, y et z en fonction de X, Y, Z.
3. Calculer X', Y', Z' en fonction de x', y', z'.
4. Calculer X', Y', Z' en fonction de X, Y, Z.
   En déduire la nature de l'application f.

EXERCICE 5

V. - Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

1. Discuter suivant les valeurs de λ, la nature des courbes (Γ) d'équation
   $$\lambda x^2=2\lambda y-\left(1+\lambda^2\right)y^2.$$
2. Quel est l'ensemble des sommets de (Γ) quand λ décrit $\mathbb{R}$.

EXERCICE 6

On considère les deux intégrales

$$A=\int_0^x \text{e}^t\cos 2t\,\text{d}t,\qquad B=\int_0^x \text{e}^t\sin 2t\,\text{d}t.$$

1. À l'aide de la formule d'intégration par parties appliquée à A et à B, établir deux relations entre A et B.
   En déduire les expressions de A et de B.

2. On pose

$$I = \int_0^x \mathrm{e}^t \cos^2 t\,\mathrm{d}t, \qquad J = \int_0^x \mathrm{e}^t \sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Calculer $(I+J)$ et $(I-J)$. En déduire les expressions de I et J.

EXERCICE 7

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{Log}|x|.$$

1. Étudier les variations de la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$g(x) = x\mathrm{e}^x + 1.$$

En déduire le signe de $\dfrac{g(x)}{x}$. (On ne demande pas la représentation graphique de g.)

2. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

En déduire que l'équation $x \in \mathbb{R};\ f(x) = m$ admet, quel que soit le réel m, deux racines distinctes, x_1 et x_2.

EXERCICE 8

On désigne par M l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à éléments réels, par O la matrice nulle, par I la matrice unité de M.
Soit A une matrice déterminée de M,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{telle que} \quad \left\{\begin{array}{lcl} a+d & = & -1, \\ ad-bc & = & -2. \end{array}\right.$$

Soit E l'ensemble des combinaisons linéaires réelles de I et de A :

$$E = \left\{\lambda A + \mu \mathrm{I},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

1. D'après le cours, on sait que M muni de l'addition des matrices et du produit externe d'une matrice par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de M.

Quelle est la dimension de E ?

2. Démontrer que $A^2 = -A + 2\mathrm{I}$.

En déduire que A^{-1} appartient à E.

3. Démontrer que le produit de deux matrices de E est dans E, et que E est un sous-anneau de l'anneau $(M, +, \times)$, où $+$ désigne l'addition des matrices et $\times$ la multiplication des matrices.